Übungen zur statistischen Thermodynamik II	**Blatt Nr. 12**

Aufgabe 1: Ein System aus $N \gg 1$ Teilchen hat die klassische Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + U(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t) \ .$$

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, \vec{p}_1, ..., \vec{p}_N, t)$ im $6N$-dimensionalen Phasenraum gilt die Liouville-Gleichung,

$$0 = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \big(\dot{\vec{r}}_j \cdot \nabla_{\vec{r}_j} + \dot{\vec{p}}_j \cdot \nabla_{\vec{p}_j} \big) \, \rho \ .$$

Leiten Sie aus der Liouville-Gleichung eine Kontinuitätsgleichung für die lokale Teilchendichte $n(\vec{r}, t)$ ab, wobei n definiert ist als

$$n(\vec{r}, t) = \int \Big\{ \prod_{k=1}^{N} \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}_k \mathrm{d}^3\vec{p}_k}{(2\pi\hbar)^3} \Big\} \, \rho(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, \vec{p}_1, ..., \vec{p}_N, t) \, \sum_{i=1}^{N} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i) \ .$$

Aufgabe 2: Ein geladenes Teilchen im elektrischen Feld fühlt die Lorentz-Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$. Die Verteilungsfunktion f reagiert auf diese Kraft durch eine Änderung $\delta f = f - f_0$, wobei $f_0 := e^{-\beta \vec{p}^{\,2}/(2m)}$ die Gleichgewichtsverteilung bezeichnet. Lösen Sie δf aus der Boltzmann-Gleichung in der Relaxationszeitnäherung, und bestimmen Sie folglich die Teilchenstromdichte $\vec{j} = \int \mathrm{d}^3\vec{p}/(2\pi\hbar)^3 \, q\vec{v} f$. Wenn wir $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ schreiben, was ist die elektrische Leitfähigkeit σ?

Aufgabe 3: Die Brownsche Bewegung kann durch die Langevin-Gleichung beschrieben werden:

$$\dot{p}_i = -\Gamma p_i + \xi_i \ , \quad \langle \xi_i(t) \rangle = 0 \ , \quad \langle \xi_i(t) \, \xi_j(t') \rangle = \kappa \, \delta_{ij} \, \delta(t - t') \ .$$

Hier beschreibt Γ Dissipation (bzw. Thermalisierung) und κ thermische Fluktuationen.

(a) Zeigen Sie, dass $p_i(t) = p_i(t_0) e^{-\Gamma(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, e^{\Gamma(t'-t)} \xi_i(t')$ die Gleichung löst.

(b) Wenn wir $t_0 \to -\infty$ schicken, fallen Anfangsbedingungen weg, und das System wird thermalisiert sein. Zeigen Sie, dass der Gleichgewichtskorrelator wie folgt aussieht:

$$\lim_{t_0 \to -\infty} \langle p_i(t) \, p_j(t') \rangle = \delta_{ij} \frac{\kappa \, e^{-\Gamma|t-t'|}}{2\Gamma} \ .$$

(c) Der Wert des Gleichgewichtskorrelators bei $t = t'$ ist aus der Gleichgewichtsverteilung bekannt. Zeigen Sie, dass dies zur Beziehung $\Gamma = \kappa/(2mk_\mathrm{B}T)$ führt.

$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$S(E,V,N) = k_B \ln \Omega(E,V,N)$	$E = TS - pV + \mu N, \ J = -pV$
$\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$F(T,V,N) = -k_B T \ln Z(T,V,N)$	$Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$
$\mathrm{d}J = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V - N\mathrm{d}\mu$	$J(T,V,\mu) = -k_B T \ln Y(T,V,\mu)$	$Y = \sum_i \exp(-\beta[E_i - \mu N_i])$
$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$(\partial x/\partial y)_z = -(\partial z/\partial y)_x/(\partial z/\partial x)_y$	$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$
$\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$\partial S/\partial V\vert_T = \partial p/\partial T\vert_V$	$\partial E/\partial V\vert_T = T\partial p/\partial T\vert_V - p$