Übungen zur statistischen Thermodynamik II	**Blatt Nr. 11**

Aufgabe 1: Führen Sie in der Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t} = D\nabla^2 n(\vec{r},t)$$

eine Fourier-Transformation im Ort durch. Integrieren Sie die noch verbleibende zeitliche Differenzialgleichung. Spezialisieren Sie die Lösung auf die Anfangsbedingung $n(\vec{r},0) = N\,\delta^{(3)}(\vec{r})$, und geben Sie hierfür die Lösung $n(\vec{r},t)$ an.

Aufgabe 2: Die Diffusionsgleichung für die Temperatur lautet

$$\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = D_T\nabla^2 T(\vec{r},t)\ ,$$

wobei $D_T \approx 7\times 10^{-7}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ die thermische Diffusionskonstante ist. An der Erdoberfläche hat die jahreszeitliche Schwankung der Temperatur die Form

$$T(z=0,t) = T_0 + A\sin(\omega_0 t)\ .$$

Dabei ist $A = 10°\mathrm{C}$ und $2\pi/\omega_0 = 1$ Jahr. Es soll die Temperaturverteilung $T(z,t)$ im Erdboden untersucht werden. Lösen Sie die Wärmediffusionsgleichung mit dem Ansatz $T(z) = T_0 + \mathrm{Re}[c(z)e^{i\omega_0 t}]$. In welcher Tiefe muss ein Keller angelegt werden, in dem die Temperaturschwankung kleiner als 1°C sein soll?

Aufgabe 3: Für kleine Strömungsgeschwindigkeiten $\vec{v} \equiv v\,\vec{e}_z$, $|v| \ll c$ lautet der Energie-Impuls-Tensor einer Flüssigkeit

$$T^{00} \approx e\ ,\quad T^{0z} \approx (e+p)v\ ,\quad T^{zz} \approx p - \left(\zeta + \frac{4\eta}{3}\right)\partial_z v\ ,$$

wobei e, p, ζ, η die Energiedichte, der Druck, die Dehnviskosität, sowie die Scherviskosität sind. Betrachten Sie Schallwellen, indem Sie die Gleichungen $0 = \partial_0 T^{00} + \partial_z T^{0z} = \partial_0 T^{0z} + \partial_z T^{zz}$ zur ersten Ordnung in kleinen Störungen ausser Gleichgewicht lösen ($e = \bar{e} + e'$, $p = \bar{p} + p'$, mit $e' \ll \bar{e}$ und $p' \ll \bar{p}$; $\partial p/\partial e =: c_s^2$). Zeigen Sie, dass die Viskositäten zur Dämpfung von Schallwellen führen. [Antwort: Dämpfungskoeffizient ist $\propto (\zeta + 4\eta/3)k^2/(\bar{e}+\bar{p})$.]

$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$S(E,V,N) = k_B \ln\Omega(E,V,N)$	$E = TS - pV + \mu N,\ J = -pV$
$\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$F(T,V,N) = -k_B T\ln Z(T,V,N)$	$Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$
$\mathrm{d}J = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V - N\mathrm{d}\mu$	$J(T,V,\mu) = -k_B T\ln Y(T,V,\mu)$	$Y = \sum_i \exp(-\beta[E_i - \mu N_i])$
$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$(\partial x/\partial y)_z = -(\partial z/\partial y)_x/(\partial z/\partial x)_y$	$S = -k_B\sum_i p_i \ln p_i$
$\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$\partial S/\partial V\|_T = \partial p/\partial T\|_V$	$\partial E/\partial V\|_T = T\partial p/\partial T\|_V - p$