

Aufgabe 1: Entwickeln Sie die Zustandsgleichung des van der Waals-Gases,

$$p(T, v) = -\frac{a}{v^2} + \frac{k_B T}{v - b},$$

um den kritischen Punkt herum (vgl. Aufgabe 1 auf Blatt 9), also nach Potenzen der Variablen

$$\tau := \frac{T - T_c}{T_c}, \quad u := \frac{v - v_c}{v_c}, \quad \pi := \frac{p - p_c}{p_c}.$$

Vernachlässigen Sie dabei Terme der Ordnungen $O(\tau u^2)$ und $O(\tau u^3)$. Zeigen Sie, dass

$$\pi = 4\tau - 6\tau u - \frac{3u^3}{2} + O(u^4).$$

Bestimmen Sie die Dampfdruckkurve $\pi_d(\tau)$ bei $\tau < 0$ mit der Maxwell-Konstruktion. Wie verhält sich u wenn $\tau \rightarrow 0^-$?

Aufgabe 2: Die Landausche freie Energie eines Ferromagnets habe die Form

$$\mathcal{F}(T, B, M) = F_0(T) + V [a(T - T_c)M^2 + \lambda M^4 - MB], \quad \lambda > 0.$$

Bestimmen Sie die magnetische Suszeptibilität $\chi_M := \partial M / \partial B|_{B=0}$ für $T > T_c$ und $T < T_c$.

Aufgabe 3: Betrachtet wird die Landausche freie Energie

$$\mathcal{F}(T, 0, M) = F_0(T) + V [a(T - T_0)M^2 - |\lambda|M^4 + \kappa M^6], \quad \kappa > 0.$$

Skizzieren Sie das Verhalten bei $T = T_0$. Bei $T > T_0$ gibt es einen Phasenübergang — welcher Ordnung? Bestimmen Sie die Übergangstemperatur T_c . [Antwort: $a(T_c - T_0) = \lambda^2/(4\kappa)$.]

| | | |
|----------------------------|--|---|
| $dE = TdS - pdV + \mu dN$ | $S(E, V, N) = k_B \ln \Omega(E, V, N)$ | $E = TS - pV + \mu N, J = -pV$ |
| $dF = -SdT - pdV + \mu dN$ | $F(T, V, N) = -k_B T \ln Z(T, V, N)$ | $Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$ |
| $dJ = -SdT - pdV - Nd\mu$ | $J(T, V, \mu) = -k_B T \ln Y(T, V, \mu)$ | $Y = \sum_i \exp(-\beta [E_i - \mu N_i])$ |
| $dH = TdS + Vdp + \mu dN$ | $(\partial x / \partial y)_z = -(\partial z / \partial y)_x / (\partial z / \partial x)_y$ | $S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$ |
| $dG = -SdT + Vdp + \mu dN$ | $\partial S / \partial V _T = \partial p / \partial T _V$ | $\partial E / \partial V _T = T \partial p / \partial T _V - p$ |