Übungen zur statistischen Thermodynamik II	**Blatt Nr. 8**

Aufgabe 1: Betrachtet wird die Hamilton-Funktion

$$H = E_0 + \sum_x a^3 \left\{ \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} \frac{[\phi(x + a\hat{i}) - \phi(x)]^2}{a^2} + \frac{\lambda}{4} \left[\phi^2(x) - v^2\right]^2 \right\} ,$$

wobei $\phi(x) \in \mathbb{R}$, x sind die Gitterpunkte, $\hat{i}$ ist ein Einheitsvektor in die i-Richtung, a ist die Gitterkonstante, und E_0 ist eine von ϕ unabhängige Konstante. Das Feld ϕ wird als $\phi = Z^{1/2}\sigma$ skaliert. Wie sollen die Parameter E_0, aZ, $a\lambda$, und v^2/Z gewählt werden, um aus H den Hamilton-Operator des 3-dimensionalen Ising-Modells zu erhalten?

Aufgabe 2: Betrachtet werden thermodynamische Eigenschaften des 1d Ising-Modells bei $h = 0$. Wir gehen von periodischen Randbedingungen aus. Im thermodynamischen Limes ist

$$F = -N\big[J + k_{\mathrm{B}} T \ln\big(1 + e^{-2\beta J}\big)\big] .$$

(a) Bestimmen Sie die innere Energie. Wie verhält sich diese bei $T \to 0$?

(b) Bestimmen Sie die spezifische Wärme. Wie verhält sich diese bei $T \to 0$?

Aufgabe 3: Wir betrachten das 1d Potts–Modell für eine Kette mit N Gitterpunkten und periodischen Randbedingungen.

(a) Geben Sie die allgemeine Formel für die Zustandssumme an, und schreiben Sie sie in faktorisierter Form.

(b) Werten Sie die Zustandssumme für $q = 3$ mittels der Transfermatrixmethode aus.

$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$S(E,V,N) = k_B \ln\Omega(E,V,N)$	$E = TS - pV + \mu N,\ J = -pV$
$\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$F(T,V,N) = -k_B T \ln Z(T,V,N)$	$Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$
$\mathrm{d}J = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V - N\mathrm{d}\mu$	$J(T,V,\mu) = -k_B T \ln Y(T,V,\mu)$	$Y = \sum_i \exp(-\beta[E_i - \mu N_i])$
$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$(\partial x/\partial y)_z = -(\partial z/\partial y)_x/(\partial z/\partial x)_y$	$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$
$\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$\partial S/\partial V\vert_T = \partial p/\partial T\vert_V$	$\partial E/\partial V\vert_T = T\partial p/\partial T\vert_V - p$