| Übungen zur statistischen Thermodynamik II | **Blatt Nr. 6** |
|---|---|

**Aufgabe 1:** Die Gitterschwingungen eines Kristalls tragen die Energie

$$E(T,V) = E_0(V) + \frac{9Nk_{\mathrm{B}}T}{x_{\mathrm{D}}^3} \int_0^{x_{\mathrm{D}}} \frac{\mathrm{d}x\, x^3}{e^x - 1} \,,$$

wobei $x_{\mathrm{D}} = \hbar\omega_{\mathrm{D}}/(k_{\mathrm{B}}T) = T_{\mathrm{D}}/T$.

(a) Für tiefe Temperaturen, $T \ll T_{\mathrm{D}}$, erhält man das bekannte Verhalten $C_V \propto T^3$. Berechnen Sie die führende Korrektur hierzu.

(b) Für hohe Temperaturen, $T \gg T_{\mathrm{D}}$, erhält man das Dulong-Petit-Gesetz $C_V \approx 3k_{\mathrm{B}}N$. Berechnen Sie die führende Korrektur hierzu.

**Aufgabe 2:** Auch wenn kein chemisches Potential vorhanden ist, kann im Phononengas eine mittlere Phononenzahl definiert werden, und zwar als Integral über die Bose-Einstein-Verteilung. Geben Sie die Integraldarstellung für die mittlere Phononenzahl für das Debye-Modell an, und werten Sie das Ergebnis für tiefe und hohe Temperaturen aus.

**Aufgabe 3:** Die Dispersionsrelation von Phononen kann durch Streuexperimente gemessen werden [Henshaw & Woods, Phys. Rev. 121 (1961) 1266, nach Idee von Feynman]. In einer inelastischen Neutronenstreuung haben die einlaufenden Neutronen den Impuls $\vec{p}_i := p_i\,\vec{e}_z$. Bei auslaufenden Neutronen werden der Betrag des Impulses $p_f$ sowie der Streuwinkel $\theta$ bezüglich der $z$-Achse gemessen. Mit $p_{f(\mathsf{max})}(\theta)$ wird derjenige Wert von $p_f$ bezeichnet, wo die Ereignisrate maximal ist. Wie kann man daraus die Dispersionsrelation $\omega_k$ der Phononen auslesen?

| | | |
|---|---|---|
| $\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$ | $S(E,V,N) = k_B \ln\Omega(E,V,N)$ | $E = TS - pV + \mu N,\ J = -pV$ |
| $\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$ | $F(T,V,N) = -k_B T \ln Z(T,V,N)$ | $Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$ |
| $\mathrm{d}J = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V - N\mathrm{d}\mu$ | $J(T,V,\mu) = -k_B T \ln Y(T,V,\mu)$ | $Y = \sum_i \exp(-\beta[E_i - \mu N_i])$ |
| $\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$ | $(\partial x/\partial y)_z = -(\partial z/\partial y)_x/(\partial z/\partial x)_y$ | $S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$ |
| $\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$ | $\partial S/\partial V\|_T = \partial p/\partial T\|_V$ | $\partial E/\partial V\|_T = T\partial p/\partial T\|_V - p$ |