Übungen zur statistischen Thermodynamik II	**Blatt Nr. 4**

Aufgabe 1: Falls der Ersatz $\sum_{\vec{q}} \to V/(2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}^3\vec{q}$ gerechtfertigt ist, lauten die Energiedichte und der Druck eines idealen Bose-Gases

$$\begin{aligned} \frac{E}{V} &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\epsilon_q}{e^{\beta(\epsilon_q-\mu)}-1} \,, \\ p &= -k_{\mathrm{B}}T \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{(2\pi\hbar)^3} \ln\Big[1-e^{-\beta(\epsilon_q-\mu)}\Big] \,. \end{aligned}$$

Setzen Sie $1 = \partial q/\partial q$ im zweiten Integrand ein, und führen Sie eine partielle Integration durch, um p in ähnlicher Form wie E/V auszudrücken, d.h. mittels Bose-Verteilung. Was ist die Beziehung von p und E/V falls $\epsilon_q = q^2/(2m)$? Gilt dieselbe Beziehung für Fermionen?

Aufgabe 2: Das Kondensat eines idealen Bose-Gases im harmonischen Oszillator besteht aus N_0 Teilchen im Grundzustand und $N - N_0$ Teilchen in angeregten Zuständen. Wenn ein Kondensat vorliegt, und das chemische Potential gleich der Nullpunktsenergie gesetzt wird, dann lautet die Teilchenzahlbedingung

$$N \overset{k_{\mathrm{B}}T \gg \hbar\omega_0}{\approx} N_0 + \int_0^\infty \mathrm{d}n_x \int_0^\infty \mathrm{d}n_y \int_0^\infty \mathrm{d}n_z \, \frac{1}{\exp[\beta\hbar\omega_0(n_x+n_y+n_z)]-1} \,.$$

Dabei numerieren n_x, n_y, n_z die Einteilchenquantenzustände [sie sind *nicht* die Besetzungszahlen dieser Zustände; darüber wurde schon summiert]. Schreiben Sie den Integranden als geometrische Reihe $\sum_{i=1}^\infty \exp[-i(...)]$ und führen Sie die Integration aus. Bestimmen Sie N_0 als Funktion der Temperatur.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass es in einem idealen Bose-Gas in zwei Dimensionen keine Bose-Einstein-Kondensation gibt. Werten Sie dazu den Zusammenhang zwischen der Teilchenzahl N und dem chemischen Potential μ aus, und diskutieren Sie das Ergebnis für $\mu \to 0^-$.

$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$S(E,V,N) = k_B \ln\Omega(E,V,N)$	$E = TS - pV + \mu N,\ J = -pV$
$\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$F(T,V,N) = -k_B T \ln Z(T,V,N)$	$Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$
$\mathrm{d}J = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V - N\mathrm{d}\mu$	$J(T,V,\mu) = -k_B T \ln Y(T,V,\mu)$	$Y = \sum_i \exp(-\beta[E_i - \mu N_i])$
$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$(\partial x/\partial y)_z = -(\partial z/\partial y)_x/(\partial z/\partial x)_y$	$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$
$\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$\partial S/\partial V\vert_T = \partial p/\partial T\vert_V$	$\partial E/\partial V\vert_T = T\partial p/\partial T\vert_V - p$