Übungen zur statistischen Thermodynamik II	**Blatt Nr. 2**

Aufgabe 1: Ein Elektron hat Spin $1/2$ und kann zwei Spineinstellungen haben, $\uparrow$, $\downarrow$. Wir betrachten die Spineinstellungen $s_{z,i}$, $i = 1, \ldots, N$, von N Elektronen mit magnetischem Moment μ_B im Magnetfeld B. Der Hamilton-Operator lautet

$$H = 2\mu_B B \sum_{i=1}^{N} s_{z,i} \; .$$

Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T, B, N)$, die Energie $E(T, B, N)$, sowie die Magnetisierung $VM(T, B, N) = -\partial F(T, B, N)/\partial B$.

Aufgabe 2: Betrachtet werden die Vibrationsfreiheitsgrade eines zweiatomigen idealen Gases. Dabei können die Ergebnisse aus Aufgabe 3 vom Übungsblatt 1 verwendet werden. Wir definieren $k_B T_{\text{vib}} := \hbar\omega_0$. Im welchem Temperaturbereich gilt der klassische Gleichverteilungssatz für die Wärmekapazität, $C_{\text{vib}} \approx k_B N$? Geben Sie eine physikalische Interpretation dazu.

Aufgabe 3: Betrachtet werden die Rotationsfreiheitsgrade eines zweiatomigen idealen Gases. Die Energie-Eigenwerte lauten

$$E_{\ell m} = \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2\Theta} \; , \quad -\ell \leq m \leq \ell \; .$$

Wir bezeichnen $k_B T_{\text{rot}} := \hbar^2/\Theta$. Im Kapitel 27 vom Buch von Fliessbach wird die entsprechende Wärmekapazität in zwei Grenzfällen hergeleitet, mit den Ergebnissen

$$\frac{C_{\text{rot}}}{k_B N} \approx \begin{cases} \dfrac{3T_{\text{rot}}^2}{T^2} \exp\left(-\dfrac{T_{\text{rot}}}{T}\right) \; , & T \ll T_{\text{rot}} \\ 1 + \dfrac{T_{\text{rot}}^2}{180 T^2} \; , & T \gg T_{\text{rot}} \end{cases} \; .$$

Zeigen Sie, wie $C_{\text{rot}}/(k_B N)$ numerisch ohne Näherung bewertet werden kann, und verifizieren Sie folglich, dass die obigen Grenzwerte in den jeweiligen Bereichen gültig sind.

$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$S(E,V,N) = k_B \ln \Omega(E,V,N)$	$E = TS - pV + \mu N,\; J = -pV$
$\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$F(T,V,N) = -k_B T \ln Z(T,V,N)$	$Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$
$\mathrm{d}J = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V - N\mathrm{d}\mu$	$J(T,V,\mu) = -k_B T \ln Y(T,V,\mu)$	$Y = \sum_i \exp(-\beta[E_i - \mu N_i])$
$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$(\partial x/\partial y)_z = -(\partial z/\partial y)_x/(\partial z/\partial x)_y$	$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$
$\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$\partial S/\partial V\vert_T = \partial p/\partial T\vert_V$	$\partial E/\partial V\vert_T = T\partial p/\partial T\vert_V - p$