Übungen zur statistischen Thermodynamik II	**Blatt Nr. 1**

Aufgabe 1: Die Maxwell-Verteilung lautet

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}} T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}} T}\right) .$$

(a) Zeigen Sie, dass das Maximum der Verteilung bei $v_{\mathsf{max}} = \sqrt{2k_{\mathrm{B}}T/m}$ liegt.

(b) Verifizieren Sie die Ergebnisse $\langle v \rangle = \sqrt{8k_{\mathrm{B}}T/(\pi m)}$ sowie $\langle v^2 \rangle = 3k_{\mathrm{B}}T/m$.

(c) Ermitteln Sie numerische Werte für alle Grössen für Luft bei Zimmertemperatur, d.h. $m = 27$ GeV/c^2, $k_{\mathrm{B}}T \approx k_{\mathrm{B}}\, 20°\mathrm{C} \approx$ eV/40.

Aufgabe 2: Die Geschwindigkeiten der Teilchen genügen der Maxwell-Verteilung aus Aufgabe 1. Für zwei herausgegriffene Teilchen definieren wir die Schwerpunkt- und Relativgeschwindigkeiten als

$$\vec{V} := \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} , \quad \vec{u} := \vec{v}_1 - \vec{v}_2 .$$

Bestimmen Sie die normierten Geschwindigkeitsverteilungen für $\vec{V}$ und $\vec{u}$. Wie soll die Masse in $f(v)$ skaliert werden, und die Letzteren zu erhalten?

Aufgabe 3: Der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \frac{m\omega_0^2 \vec{r}_i^{\,2}}{2} \right)$$

beschreibt N unabhängige dreidimensionale harmonische Oszillatoren. Bestimmen Sie die Zustandssumme $Z(T,N)$ und die Energie $E(T,N)$ des Systems.

$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$S(E,V,N) = k_B \ln \Omega(E,V,N)$	$E = TS - pV + \mu N,\ J = -pV$
$\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$F(T,V,N) = -k_B T \ln Z(T,V,N)$	$Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$
$\mathrm{d}J = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V - N\mathrm{d}\mu$	$J(T,V,\mu) = -k_B T \ln Y(T,V,\mu)$	$Y = \sum_i \exp(-\beta[E_i - \mu N_i])$
$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$(\partial x/\partial y)_z = -(\partial z/\partial y)_x/(\partial z/\partial x)_y$	$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$
$\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$\partial S/\partial V\|_T = \partial p/\partial T\|_V$	$\partial E/\partial V\|_T = T\partial p/\partial T\|_V - p$