

4.2 Boltzmann-Gleichung [TF 42]

Motivation:

Die Boltzmann-Gleichung stellt eine konkrete Implementierung der Master-Gleichung aus Seite 42 dar, und kann dazu benutzt werden, Koeffizienten wie D, D_T, β quantitativ zu schätzen. aus Seite 43

Variablen:

Statt ρ_i werden als Variablen die Phasenraumverteilungen $f_j(t, \vec{r}, \vec{p})$ benutzt, wobei „j“ verschiedene Teilchenarten numeriert. Die Normierung sei so gewählt, dass

$$n_j(t, \vec{r}) := \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} f_j(t, \vec{r}, \vec{p})$$

die Teilchendichte ergibt.

Linke Seite:

Die linke Seite enthält die Zeitableitung von f_j :

$$\frac{df_j(t, \vec{r}(t), \vec{p}(t))}{dt} = \frac{df_j}{dt} + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_j + \dot{\vec{p}} \cdot \nabla_{\vec{p}} f_j$$

$$\text{Newton II} \rightarrow \left\{ \frac{d}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{p}} \right\} f_j$$

Wenn dies gleich null gesetzt wird, sprechen wir von der Vlasov-Gleichung.

Rechte Seite:

Die rechte Seite enthält den Kollisionsterm. In abstrakter Form gilt also

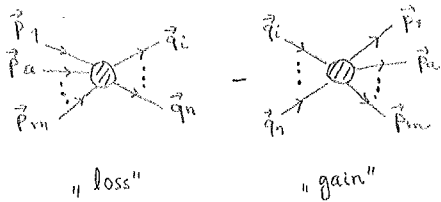
$$\left(\frac{d}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{p}} \right) f_j = \left(\frac{df_j}{dt} \right)_{\text{coll}}$$

Konkret lautet ($j \rightarrow 1$)

$$\left(\frac{df_1}{dt} \right)_{\text{coll}} = -\frac{c}{2E_1} \sum_{m,n} \int d\Phi_{1+m \rightarrow n} |M|_{1+m \rightarrow n}^2$$

$$\times \left\{ f_1 f_a \dots f_m (1 \pm f_l) \dots (1 \pm f_n) \right. \\ \left. - f_l \dots f_n (1 \pm f_1) (1 \pm f_a) \dots (1 \pm f_m) \right\}$$

Bosonen
Fermionen

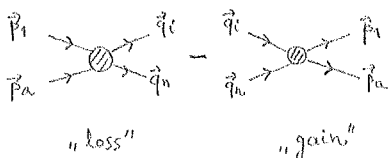


wobei: $c :=$ Symmetriefaktor für identische Teilchenarten, eg. $\frac{1}{n!}$

$$d\Phi_{1+m \rightarrow n} := \int \prod_{a=1}^m \frac{d^3p_a}{(2\pi\hbar)^3 2E_a} \prod_{i=1}^n \frac{d^3q_i}{(2\pi\hbar)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \sum_a p_a - \sum_i q_i)$$

$|M|_{1+m \rightarrow n}^2 :=$ Transitionsamplitude Quadrat; entspricht $\Gamma_{1+m, n}$ auf Seite 42.

Unter normalen Umständen, d.h. nur eine Teilchenart; nur „elastische“ Streuungen; verdünntes Gas mit $f \ll 1$, gilt



$$\left(\frac{df_1}{dt} \right)_{\text{coll}} = -\frac{c}{2E_1} \int d\Phi_{1+1 \rightarrow 2} |M|_{1+1 \rightarrow 2}^2 \{ f_1 f_a - f_l f_n \}$$

Gleichgewichtslimes: Eine wesentliche Eigenschaft des Kollisionsterms ist, dass er im Gleichgewicht verschwindet („detailed balance“). Beweis:

* für Bose-Verteilung gilt $1+n_B(\epsilon) = \frac{e^{\beta\epsilon-1+1}}{e^{\beta\epsilon}-1} = e^{\beta\epsilon} n_B(\epsilon)$.

* für Fermi-Verteilung gilt $1-n_F(\epsilon) = \frac{e^{\beta\epsilon+1-1}}{e^{\beta\epsilon}+1} = e^{\beta\epsilon} n_F(\epsilon)$

* die Verteilungsfunktionen können also im Gleichgewicht als $f_1 f_a \dots f_m f_{i_1} \dots f_{i_n} (e^{\beta(\epsilon_1+\dots+\epsilon_n)} - e^{\beta(\epsilon_1+\epsilon_a+\dots+\epsilon_m)})$ kombiniert werden.

* $d\Omega_{1+1 \rightarrow n}$ enthält aber Energie-Erhaltung, $\delta(\epsilon_1 + \sum_a \epsilon_a - \sum_i \epsilon_i) \Rightarrow \Pi$.

Im Allgemeinen sollte $(\frac{\partial f_i}{\partial t})_{coll}$ also $\propto f_j - n_{B/F}$ sein, mit Korrekturen von höheren Ordnungen. Diese Eigenschaft wird im Moment eine wichtige Rolle spielen.

Beziehung zum Wirkungsquerschnitt:

Anhand von $|M|^2$ wird der Wirkungsquerschnitt als

$$\mathcal{Z} = \frac{c}{F} \int d\tilde{\Phi}_{1+1 \rightarrow n} |M|^2_{1+1 \rightarrow n}$$

gerechnet. Hier ist $F = 4\epsilon_1 \epsilon_a |\vec{v}_1 - \vec{v}_a|$ ein „Flussfaktor“, und $d\tilde{\Phi}_{1+1 \rightarrow n}$ ist wie $d\Phi_{1+1 \rightarrow n}$, aber es wird nur über die Impulse $\vec{q}_i, \dots, \vec{q}_n$ im Endzustand integriert.

* explizit:

$$d\tilde{\Phi}_{1+1 \rightarrow 2} = \frac{d^3 p_a}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{1}{2\epsilon_a} d\tilde{\Phi}_{1+1 \rightarrow 2}$$

Wir können jetzt $(\frac{\partial f_1}{\partial t})_{coll}$ aus Seite 45 mittels derselben Struktur als \mathcal{Z} ausdrücken*:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{coll} = - \int \frac{d^3 p_a}{(2\pi\hbar)^3} \frac{c}{4\epsilon_1 \epsilon_a} \int d\tilde{\Phi}_{1+1 \rightarrow 2} |M|^2_{1+1 \rightarrow 2} \{f_1 f_a - f_1 f_n\}$$

Wie wir oben gesehen haben, verschwindet $\{f_1 f_a - f_1 f_n\}$ im Gleichgewicht. Wir bezeichnen die Gleichgewichts-Verteilungen mit $f_{i,0}$ und die entsprechenden Dichten mit $n_{i,0}$. Wenn wir jetzt über \vec{p}_1 integrieren, erhalten wir

$$\left(\frac{\partial n_1}{\partial t}\right)_{coll} := \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{coll}$$

$$\int_{\vec{p}} := \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\vec{p}_1, \vec{p}_a} |\vec{v}_1 - \vec{v}_a| \frac{c}{F} \int d\tilde{\Phi}_{1+1 \rightarrow 2} |M|^2_{1+1 \rightarrow 2} \frac{f_{1,0} f_{a,0}}{n_{1,0} n_{a,0}} \cdot \left\{ \frac{f_1 f_a}{f_{1,0} f_{a,0}} n_{1,0} n_{a,0} - \frac{f_1 f_n}{f_{1,0} f_{n,0}} n_{1,0} n_{n,0} \right\} \approx n_1 n_a - n_1 n_n$$

Falls wir weiterhin $a := i := n := 1$ und den Endzustand ins Gleichgewicht setzen, folgt die Lee-Weinberg-Gleichung,

$$\left(\frac{\partial n_1}{\partial t}\right)_{coll} \approx - \langle \partial v \rangle (n_1^2 - n_{1,0}^2)$$

Relaxationszeitnäherung:

Wenn wir die Lee-Weinberg-Gleichung um das Gleichgewicht linearisieren, d.h. $n_1 \approx n_{1,0} + \delta n_1$ schreiben und zur ersten Ordnung in δn_1 entwickeln, erhalten wir

$$\left(\frac{\delta n_1}{\delta t}\right)_{\text{coll}} \approx -2 \langle \delta v \rangle n_{1,0} \delta n_1$$

Laut Seite 44 ist aber $n \langle \delta v \rangle \sim \frac{1}{\tau}$.

Im Allgemeinen wissen wir, dass $\left(\frac{\delta f_1}{\delta t}\right)_{\text{coll}}$ im Gleichgewicht verschwindet und deshalb von erster Ordnung in δf_1 ist.

Diese Überlegungen geben Anlass zur Relaxationszeitnäherung, wobei der Stossterm als

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t}\right)_{\text{coll}} \approx - \frac{f_1 - f_{1,0}}{\tau}$$

genähert wird.* Eigentlich sollte τ eine Funktion des Impulses sein, wird aber häufig als konstant behandelt. Um die Notation zu vereinfachen, bezeichnen wir im Folgenden $f_1 \rightarrow f$.

* Die Relaxationszeit ist nicht unbedingt gleich zur mittleren Stosszeit auf Seite 44; weil die beiden aber ein wenig vage definiert worden sind, ist der Unterschied bedeutungslos.

Lösung der Boltzmann-Gleichung in der Relaxationszeitnäherung

Die Boltzmann-Gleichung lautet jetzt (Seite 45 mit $f_j \rightarrow f_1 \rightarrow f$)

$$\left(\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{R}} + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{p}}\right) f \approx - \frac{f - f_0}{\tau} \quad (*)$$

** für den Fall $\vec{F} = \vec{0}$

Eine Lösung** wäre $f = f_0$; uns interessiert aber Thermalisierung (vgl. Kapitel 4.1), d.h. $\delta f := f - f_0 \neq 0$.

Dazu führen wir eine kleine Störung ein, z.B. eine äussere Kraft. Folglich ist die linke Seite von Gl. (*) ungleich null.

Was passiert ist, dass das System auf die Störung reagiert: $\delta f \neq 0$, und zwar wie wir aus der rechten Seite von Gl. (*) auslesen können.

Nachher können wir die makroskopische „Antwort“ („response“) rechnen, die aus δf resultiert, z.B. eine Teilchen- bzw. elektrische Stromdichte.

Am Ende wird die Antwort noch durch einen Transportkoeffizienten parametrisiert (vgl. Seite 43).

Wenn wir τ (bzw. $\tau(\vec{p})$) nicht als eine unbekannte Konstante einführen, sondern aus der vollen Boltzmann-Gleichung bestimmen könnten, wäre diese eine quantitative Methode zur Bestimmung von Thermalisierungsraten.

Bestimmung des Diffusionskoeffizienten in der Relaxationszeitnäherung

Als Beispiel für die Lösung der linearisierten Boltzmann-Gleichung betrachten wir den Diffusionskoeffizienten, definiert als

$$\vec{j} = -D \vec{\nabla} n \quad (\text{vgl. Seite 43})$$

Teilchenstromdichte

Wie können wir die „Störung“ $\vec{\nabla} n + \vec{0}$ erzeugen?

Dazu gibt es keine eindeutige Antwort; wir haben die Wahl, eine geeignete Methode zu finden. Für $n(\vec{r})$ liegt es nahe, das chemische Potential ortsabhängig zu machen:

$$f = f_0 + \delta f := e^{-\beta \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu_0 - \delta \mu(\vec{r}) \right)}$$

Dann ist f_0

$$\left(\underbrace{\partial_t}_0 + \underbrace{\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}}}_0 + \underbrace{\vec{F} \cdot \nabla_{\vec{p}}}_0 \right) f = \beta \vec{v} \cdot \nabla \delta \mu(\vec{r}) (f_0 + \delta f)$$

Zweiter Ordnung in der Störung

Aus Gl. (*) auf Seite 47 folgt dann

$$\delta f = -\tau \beta \vec{v} \cdot \nabla \delta \mu(\vec{r}) f_0$$

Letztendlich können wir die Teilchenstromdichte bestimmen:

$$\vec{j} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \vec{v} (f_0 + \delta f)$$

$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\vec{p}}{m} \left\{ 1 - \frac{\tau \beta}{m} \vec{p} \cdot \nabla \delta \mu(\vec{r}) \right\} f_0$$

Das Integral $\int d^3 p \vec{p} f_0$ verschwindet wegen Antisymmetrie unter $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$. Mit der Bezeichnung $\vec{\mu} := \nabla \delta \mu(\vec{r})$ ergibt der zweite Term das Ergebnis (mit Summenkonvention)

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \underbrace{p_k \vec{e}_k}_{\vec{p}} \underbrace{p_j \mu_j}_{\vec{p} \cdot \vec{\mu}} f_0 = \frac{1}{3} \vec{e}_{kMj} \delta_{kj} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \vec{p}^2 f_0$$
$$= \frac{2m}{3} \vec{\mu} n_0 \left\langle \frac{\vec{p}^2}{2m} \right\rangle$$

Gleichverteilungssatz, vgl. Seite 3

$$= m k_B T \vec{\mu} n_0$$

$$\Rightarrow \vec{j} = -\frac{\tau \beta}{m} k_B T n_0 \nabla \delta \mu(\vec{r})$$

Letztendlich schreiben wir $\beta \nabla \delta \mu(\vec{r}) = \frac{\nabla n}{n_0}$, und identifizieren

$$D = \frac{\tau k_B T}{m} = \frac{\tau \langle \vec{v}^2 \rangle}{3}$$

Dies kann mit der groben Schätzung auf Seite 44 verglichen werden: ähnlich aber nicht gleich ($\langle \vec{v}^2 \rangle$ vs. $\langle v \rangle^2$).