

3.3 Ginzburg-Landau-Theorie [TF 39-40]

Ausgangspunkt: Wenn wir Phasenübergänge verstehen möchten, brauchen wir Zugang auch zu Nichtgleichgewichtszuständen (vgl. Maxwell-Konstruktion, auf Seite 34). Diese Idee wird mit dem Ginzburg-Landau-Formalismus systematisiert, Im Folgenden benutzen wir in der Regel die Notation der magnetischen Systeme (vgl. Kapitel 3.1), auch wenn die Prozedur viel allgemeiner ist.

Ordnungsparameter: Es wird angenommen, dass eine oder mehrere Größen identifiziert werden können, die beim Phasenübergang grosse Änderungen erfahren, und die damit die Dynamik „betreiben“. Diese Größen werden Ordnungsparameter genannt, und im Folgenden mit ϕ bezeichnet. Beispiele:

- $\phi \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} M \in \mathbb{R} & \text{Magnetisierung beim Ising-Modell} \\ \Delta(\frac{V}{N}) \in \mathbb{R} & \text{Gas-Flüssigkeit-Übergang} \\ \Psi \in \mathbb{C} & \text{Suprafluidität (z.B. } ^4\text{He)} \\ \Psi \in \mathbb{C}, A_\mu \in \mathbb{R}^4 & \text{Supraleitung} \end{array} \right.$

Symmetriebrechung: Ohne externes Feld sei der Hamilton-Operator invariant in einer Transformation, z.B. $z_i \rightarrow -z_i$ beim Ising-Modell. Dies entspricht $M \rightarrow -M$ für den Ordnungsparameter. Mit externem Feld wird die Symmetrie „explizit gebrochen“, z.B. $\partial M / \partial B > 0$ für Paramagnetismus. Es geht um eine „spontane Symmetriebrechung“, wenn $\lim_{B \rightarrow 0} M \neq 0$, wie beim Ferromagnetismus.

Freie Energie ausser Gleichgewicht als Funktional von ϕ

$$\mathcal{F}[\phi] = F_0 + \int d^3r \left\{ (\nabla\phi)^2 - h\phi + a(T-T_0)\phi^2 + \lambda\phi^4 + \dots \right\}$$

↑
unabhängig vom ϕ

↑
explizite Symmetriebrechung

↑
höhere Potenzen

In der „Mittelfeldnäherung“ entspricht Gleichgewicht dem Minimum von $\mathcal{F}[\phi]$, d.h. Lösung von $\delta\mathcal{F}[\phi]/\delta\phi = 0$.

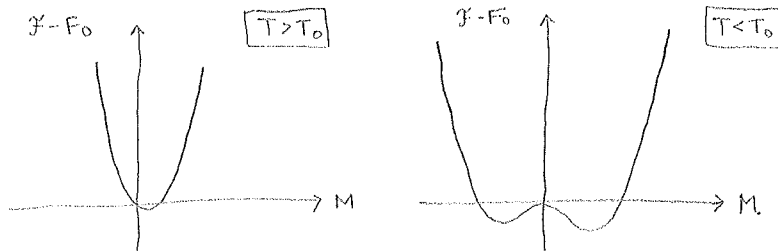
In der einfacheren „Landau-Theorie“ wird ϕ als räumlich konstant behandelt, wobei $\nabla\phi$ wegfällt und $\int d^3r$ durch V ersetzt wird. In diesem Fall entspricht Gleichgewicht dem Minimum von $\mathcal{F}(\phi)$, d.h. $\mathcal{F}'(\phi) = 0$.

Beispiel: Ferromagnetismus in der Landau-Theorie

Wir ersetzen $\phi \rightarrow M \in \mathbb{R}$ und $h \rightarrow B$:

$$\mathcal{F}(T, B, M) = F_0(T) + V [-BM + \alpha(T-T_0)M^2 + \lambda M^4]$$

Es muss $\lambda > 0$ gelten, sonst könnte \mathcal{F} beliebig negativ sein.



Wir suchen nach dem Minimum, bewerten \mathcal{F} dort, und setzen folglich $B \rightarrow 0$.

* $T > T_0$ Für $B \rightarrow 0$ liegt das Minimum offensichtlich bei $M = 0$, d.h. $\mathcal{F}(T, 0, M_{min}) = F_0(T)$.

* $T < T_0$ Wenn $B \rightarrow 0^+$, wird das Minimum im Bereich $M > 0$ bevorzugt. Sonst spielt B keine grosse Rolle. Aus $\partial \mathcal{F} / \partial M = 0$ folgt

$$2\alpha(T-T_0)M + 4\lambda M^3 = 0$$

Die Lösung $M = 0$ ist ein Maximum.

Minimum liegt bei $M^2 = \frac{\alpha(T_0-T)}{2\lambda}$

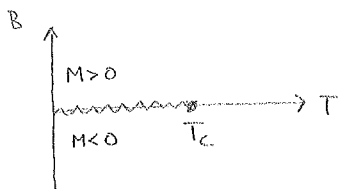
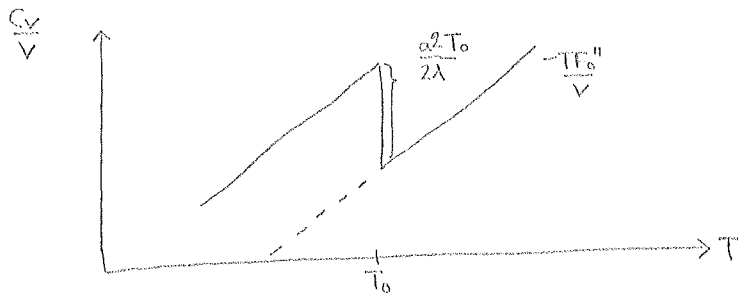
Folglich ist

$$F(T) := \mathcal{F}(T, 0, M_{min}) = F_0(T) + V \frac{\alpha^2(T_0-T)^2}{\lambda} \left(\underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}_{-1/4} \right)$$

Aus der freien Energie kann die Entropie bestimmt werden,

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -F_0'(T) - \Theta(T_0-T) \frac{V\alpha^2(T_0-T)}{2\lambda}$$

und dann auch die Wärmekapazität, $C_V = T \frac{\partial S}{\partial T} = -TF_0''(T) + \Theta(T_0-T) \frac{V\alpha^2 T}{2\lambda}$



Fazit: Wir finden einen Phasenübergang der zweiten Ordnung. Die Temperatur T_0 kann mit der kritischen Curie-Temperatur T_c identifiziert werden. Das Verhalten des Systems in der Nähe von T_c wird allerdings durch die Mittelfeldnäherung nicht richtig dargestellt (vgl. Seite 36).

Korrelationen:

Eine sehr wichtige Frage beim Studium von Phasenübergängen ist, welches räumliche Ausmass typische "Fluktuationen" aufweisen bzw. bei welchen Abständen Änderungen des Ordnungsparameters miteinander korreliert sind. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir das Ginzburg-Landau-Funktional verwenden. Wir betrachten wieder $\phi \rightarrow M$ und nehmen an, dass M z -abhängig sei.

$B \rightarrow 0, T_0 \rightarrow T_c$

$\Rightarrow \mathcal{F} = F_0 + \int d^3r \left\{ (\partial_z M)^2 + a(T-T_c)M^2 + \lambda M^4 \right\}$

Benutze die Euler-Lagrange-Gleichungen: $\frac{\delta}{\delta z} \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta (\partial_z M)} \right) = \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta M}$

$\Rightarrow \partial_z^2 M = a(T-T_c)M + 2\lambda M^3$

Wir können dies lösen, indem wir kleine "Störungen" um den Mittelwert betrachten: $M(z) = \bar{M} + \delta M(z)$.

* $T > T_c$ $\bar{M} = 0$ (vgl. Seite 38) $\Rightarrow M^3 \sim \mathcal{O}(\delta M^3)$

$\Rightarrow \partial_z^2 \delta M = a(T-T_c) \delta M$

Lösung lautet $c_1 e^{-\sqrt{a(T-T_c)} z} + c_2 e^{\sqrt{a(T-T_c)} z}$
 physikalisch nicht sinnvoll $\Rightarrow c_2 = 0$.

* $T < T_c$ $\bar{M}^2 = \frac{a(T_c-T)}{2\lambda}$ (vgl. Seite 38)

$\Rightarrow M^3 = \bar{M}^3 + 3\bar{M}^2 \delta M + \mathcal{O}(\delta M^2)$

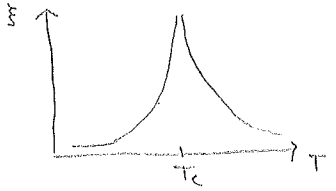
$\Rightarrow \partial_z^2 \delta M \approx a(T-T_c)\bar{M} + 2\lambda \bar{M}^3 + a(T-T_c)\delta M + 3a(T_c-T)\delta M$ (kürzen sich)
 $= 2a(T_c-T)\delta M$

Lösung lautet $c_1 e^{-\sqrt{2a(T_c-T)} z} + c_2 e^{\sqrt{2a(T_c-T)} z}$

Die Korrelationslänge ξ wird als $\delta M \approx c_1 e^{-z/\xi}$ definiert.

Es folgt

$\xi \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a(T-T_c)}}, & T > T_c \\ \frac{1}{\sqrt{2a(T_c-T)}}, & T < T_c \end{cases}$



Fazit: Beim Curie-Punkt divergieren Korrelationslängen. Wir sagen, dass es Fluktuationen auf allen Skalen gibt. Dies erklärt die Universalität des kritischen Verhaltens (vgl. Seite 36). Der Exponent der Divergenz wird allerdings von der Mittelfeldnäherung nicht richtig vorhergesagt.

Kritische Exponenten: Das Verhalten von physikalischen Grössen in der Nähe des kritischen Punkts wird durch kritische Exponenten charakterisiert. Mit der Bezeichnung $\tau := \frac{T-T_c}{T_c}$ werden diese wie folgt definiert:

- Wärmekapazität $C_V \sim |\tau|^{-\alpha}$
- Ordnungsparameter $\bar{\phi} \sim |\tau|^\beta \Theta(\tau)$
- Suszeptibilität $\chi_M \sim |\tau|^{-\gamma}$
- Ordnungsparameter $h \sim \bar{\phi}^\delta$ bei $\tau=0$
- Korrelationslänge* $\xi \sim |\tau|^{-\nu}$

* Weiterhin kann man Korrelationsfunktion bei $\tau=0$ betrachten:
 $\langle \phi(0)\phi(r) \rangle \sim |r|^{2-d-\eta}$
 ↑
 Raumdimension

Im Prinzip kann man separate Exponenten für $\tau < 0$ und $\tau > 0$ definieren, z.B. $\xi \sim |\tau|^{-\nu}$ bei $\tau < 0$ und $|\tau|^{-\nu'}$ bei $\tau > 0$, in der Praxis sind die Exponenten aber gleich. Die Koeffizienten sind dagegen unterschiedlich (vgl. § auf Seite 39).

Es kann vorkommen, dass wenn die „führende Divergenz“ subtrahiert wird, darunter eine „Korrektur zur Skalierung“ sichtbar wird, mit einem anderen Exponenten: $f(\tau) \sim |\tau|^\alpha (1 + c|\tau|^\gamma + \dots)$.

In der Praxis ist es häufig besser, sich genau am kritischen Punkt zu setzen ($\tau=0$). Wenn das Volumen endlich ist (z.B. $V=L^3$), kann die Korrelationslänge dann nicht divergieren, sondern $\xi \sim L$. Daraus folgt, dass wir den kritischen Punkt nicht ganz richtig lokalisiert haben, sondern mit Unsicherheit $|\tau| \sim L^{-1/\nu}$.

$$\Rightarrow \begin{aligned} C_V &\sim L^{\alpha/\nu}, \\ \bar{\phi} &\sim L^{-\beta/\nu}, \\ \chi_M &\sim L^{\gamma/\nu}. \end{aligned}$$

Die kritischen Exponenten können auf verschiedenen Weisen studiert werden: experimentell (z.B. λ -Übergang vom ⁴He), mit grossen numerischen Simulationen (häufig mit Ising-Modell), oder mit theoretischen Methoden. Die letzte Alternative hat ganz wesentlich zur Entwicklung der modernen Quantenfeldtheorie beigetragen, und gibt immer noch neue Anreize für dieses Fachgebiet (vgl. Seite 36).