2.6 Thermodynamik von Photonen [TF 34]

Ausgangspunkt: Die Physik von Photonen hat viele Ähnlichkeiten mit der Physik von Phononen (Kapitel 2.5). Historisch gesehen wurden Photonen früher verstanden, im Zusammenhang mit der Entstehung der Quantenmechanik (vgl. Plancksche Strahlungsverteilung). Im Gegensatz zu Phononen werden Photonen als „elementare" Teilchen betrachtet, und folglich ist ihre Dispersionsrelation einfacher.

Dispersionsrelation: Bekanntlich besitzen die Maxwell-Gleichungen Wellenlösungen, mit der Dispersionsrelation $\omega_k = c\,k$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Aus $\nabla\cdot\vec{B} = \nabla\cdot\vec{E} = 0$ (im Vakuum) folgt, dass nur transversale Polarisationszustände vorhanden sind.

Photonen: Photonen sind Quanten der elektromagnetischen Strahlung, mit dem Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ und der Energie $E = \hbar\omega_k = \hbar c k$. Es handelt sich um Spin-1 Bosonen, auch wenn der longitudinale Polarisationszustand fehlt.

Wie bei Phononen, gibt es auch hier keine fixierte Teilchenzahl N. Photonen können eben aus Streuungen oder Paarvernichtungen erzeugt werden. Im grosskanonischen Ensemble gilt folglich $\mu = 0$.

Wenn wir den Wellenvektor $\vec{k}$ als Variable benutzen, lauten die thermodynamischen Grössen (vgl. Seite 11 mit $J = -pV$)

$$p(T) = p_0 - 2k_BT\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\ln\left(1-e^{-\beta\hbar c k}\right),$$

$$E(T,V) = E_0(V) + 2V\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{\hbar c k}{e^{\beta\hbar c k}-1}.$$

Wenn wir die Variable (vgl. Seite 23)

$$x := \frac{\hbar c k}{k_B T}$$

einführen, ergibt sich

$$E(T,V) = E_0(V) + \frac{2V\cdot 4\pi}{(2\pi)^3}\cdot\frac{(k_BT)^4}{(\hbar c)^3}\int_0^\infty\frac{dx\,x^3}{e^x-1}.$$

Thermodynamik: Alle thermodynamischen Grössen können explizit bestimmt werden. Mit Hilfe von $\int_0^\infty \frac{dx\, x^3}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$ aus Seite 24 lautet die Energie

$$E(T,V) = E_0(V) + \frac{V}{\pi^2} \cdot \frac{k_B^4 T^4}{\hbar^3 c^3} \frac{\pi^4}{15} = E_0(V) + V \frac{4\sigma T^4}{c},$$

wobei die Stefan-Boltzmann-Konstante als

$$\sigma := \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} \approx 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

definiert worden ist.

Für die Wärmekapazität erhalten wir

$$C_V(T,V) = \frac{\partial E}{\partial T} = V \frac{16 \sigma T^3}{c}.$$

Das Verhalten $\propto T^3$ ist wie bei Phononen bei niedrigen Temperaturen, aber gilt diesmal auch bei hohen Temperaturen.

Für den Druck erwarten wir $p = \frac{E}{3V}$ (vgl. STI, Seite 11), und können dies nochmal verifizieren. Anhand von x gilt

$$p(T) = p_0 - 2 k_B T \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{(k_B T)^3}{(\hbar c)^3} \int_0^\infty dx\, x^2 \ln(1-e^{-x}).$$

Wir bemerken, dass

$$\frac{d}{dx} \ln(1-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}.$$

Partielle Integration ergibt

$$\int_0^\infty dx\, x^2 \ln(1-e^{-x}) = \int_0^\infty dx \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) \ln(1-e^{-x})$$
$$= \underbrace{\left[\frac{x^3}{3} \ln(1-e^{-x})\right]_0^\infty}_{\text{verschwindet}} - \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^3}{3} \frac{1}{e^x-1}}_{\frac{\pi^4}{45} \text{ laut Seite 24}}$$

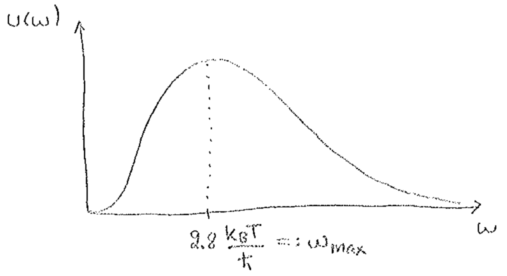
Es folgt

$$p(T) = p_0 + \underbrace{\frac{k_B^4 T^4}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \cdot \frac{\pi^4}{45}}_{\frac{E(T,V) - E_0(V)}{3V}} \Rightarrow \text{OK}.$$

Vakuumbeiträge: Wie soll man die Vakuumbeiträge $E_0(V)$, p_0 interpretieren? Aus $E = TS - pV + \mu N$ folgt mit drittem Hauptsatz und $\mu = 0$, dass im Limes $T \to 0$

$$E_0(V) = -p_0 V$$

gilt. Den Wert $\frac{E_0(V)}{V} = -p_0$ nennt man die Kosmologische Konstante. Eine wohldefinierte physikalische Bedeutung hat dieser Term erst in einer Theorie von (Quanten) Gravitation.



„Wiens Verschiebungsgesetz"

Plancksche Verteilung: Es lohnt sich, den thermischen Beitrag zur Energiedichte auch in differentieller Form zu untersuchen. Wenn wir statt k oder x die Kreisfrequenz $\omega = \omega_k = ck$ als Integrationsvariable verwenden, ergibt sich (vgl. Seite 25)

$$\frac{E(T,V) - E_0(V)}{V} = \int_0^\infty d\omega \; u(\omega) \,, \quad u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \,.$$

Dies ist die berühmte Schwarzkörper- bzw. Plancksche Verteilung.

Ein Beispiel für eine extrem genau gemessene Plancksche Verteilung ist diejenige der kosmischen Hintergrundstrahlung, mit $T = 2.725$ K. Das Maximum liegt bei der Frequenz $f_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi} = 160$ GHz, die entsprechende Wellenlänge $\lambda_{max} = \frac{c}{f_{max}}$ ist im mm-Bereich (Mikrowelle).

Wenn man den klassischen Limes $\hbar \to 0$ nimmt, folgt

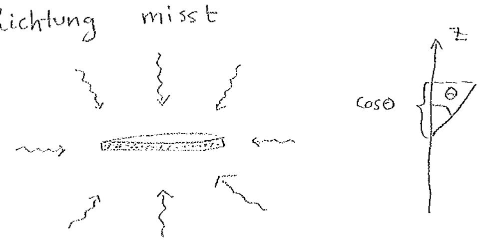
$$\lim_{\hbar \to 0} u(\omega) = \frac{k_B T \,\omega^2}{\pi^2 c^3} \,.$$

$e^{\beta\hbar\omega} \approx 1 + \beta\hbar\omega$

Dies wird das Rayleigh-Jeans-Gesetz genannt. Das Problem dabei ist, dass das Integral $\int_0^\infty d\omega \; u(\omega)$ mit dieser Form divergiert. Um diese „Ultraviolett-katastrophe" zu beseitigen, hat Planck Quanten eingeführt.*

* Das Verhalten beim grossen ω sieht „klassisch" aus, wenn wir statt Kreisfrequenz einer Welle, die Energie $\varepsilon = \hbar\omega$ eines Teilchens als Variable benutzen:
$$d\omega \; u(\omega) \overset{\varepsilon \gg k_B T}{\approx} d\varepsilon \; \frac{\varepsilon^3 e^{-\beta\varepsilon}}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \,.$$

Strahlungsintensität: Neben der Energiedichte und des Strahlungsdrucks spielt auch die Strahlungsintensität bei praktischen Anwendungen eine wichtige Rolle. Die Intensität wird als Leistung pro Fläche definiert, nachdem ein Messgerät ins System gelegt wird, und es die Energiestromdichte aus einer Richtung misst



Projektion in die nach unten zeigende Richtung:

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \,\sin\theta \,\cos\theta}{\int_0^{\pi} d\theta \,\sin\theta} = \frac{\int_0^{1} d(\cos\theta)\,\cos\theta}{\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \,.$$

Die Intensität beträgt also

$$I = \frac{1}{4} \cdot \frac{E(T,V) - E_0(V)}{V}\, c = \sigma T^4 \,.$$

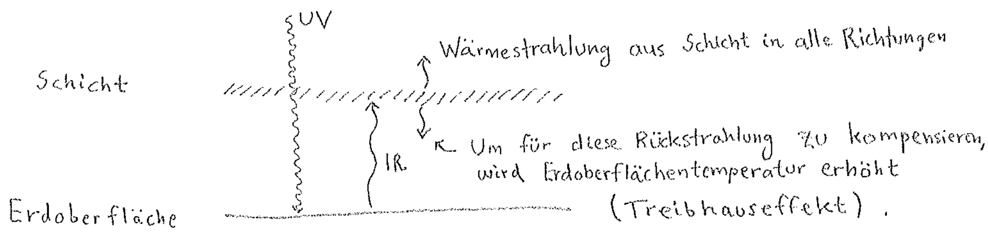
Seite 26

Anwendungen:

* <u>Auf der Erde:</u> Die Solarkonstante, d.h. die Intensität der Sonnenstrahlung auf der Distanz der Erde, beträgt 1370 W/m². Der tatsächliche Mittelwert (über Tag/Nacht sowie geographische Lage) sei $I_0 \approx 340\,\mathrm{W/m^2}$. Mit Hilfe der Stefan-Boltzmann-Konstante können wir daraus eine erste Näherung für die Temperatur eines Gleichgewichtzustands ableiten:

$$\frac{340\,\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} \approx \sigma \cdot (278\,\mathrm{K})^4 .$$

* <u>In der Erdatmosphäre:</u> Es gibt eine Schicht, welche Strahlung im infraroten Bereich absorbiert aber im ultravioletten Bereich die ursprünglichen Sonnenstrahlung durchlässt:



* <u>An der Sonnenoberfläche:</u> Das Spektrum der Sonnenstrahlung hat ungefähr die Form der Planckschen Verteilung. Ein Fit ergibt die Temperatur $T_\odot \approx 5800\,\mathrm{K}$.

* <u>Im frühen Universum:</u> Aus der allgemeinen Relativitätstheorie folgt die Gleichung

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\sqrt{24\pi}}{m_{P\ell}} \frac{T s(T) \sqrt{e(T)}}{c(T)} ,$$

wobei sogenannte natürliche Einheiten benutzt wurden ($\hbar = k_B = c = 1$), die Newtonsche Gravitationskonstante als $G_N = \frac{1}{m_{P\ell}^2}$ geschrieben wurde, $m_{P\ell} \approx 1.22 \times 10^{19}\,\mathrm{GeV}/c^2$ die „Planck-Masse" bezeichnet, und $e := \frac{E}{V}$, $c := \frac{C_V}{V}$, $s := \frac{S}{V}$.

Für (den thermischen Teil der) Schwarzkörperstrahlung gilt in den natürlichen Einheiten

$$e = \frac{\pi^2 T^4}{15}, \quad c = \frac{4\pi^2 T^3}{15}, \quad s = -\frac{1}{V}\frac{\partial J}{\partial T} = \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{4\pi^2 T^3}{45} .$$

Wir erhalten also

$$\frac{dT}{dt} \approx -\frac{\sqrt{24\pi}}{m_{P\ell}} \cdot \frac{T}{3} \sqrt{\frac{\pi^2 T^4}{15}} = -\frac{T^3}{m_{P\ell}} \sqrt{\frac{8\pi^3}{45}} .$$

Integration ergibt

$$\frac{1}{T^2} = \frac{2t}{m_{P\ell}} \sqrt{\frac{8\pi^3}{45}} ,$$

d.h. je früher desto heisser! ($T \propto t^{-1/2}$)

— o — o —