

2.4 Fermi-Gas [TF 32]

Ausgangspunkt: Laut Seite 10 gilt für Fermionen (mit zwei Spinzuständen; $J=1/2$):

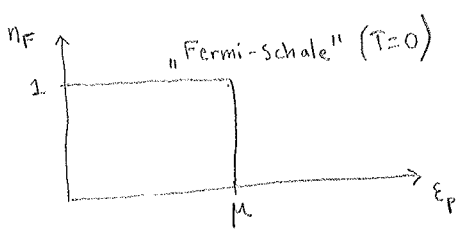
$$pV = 2k_B T \sum_{\vec{p}} \ln [1 + e^{-\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)}],$$

$$N = 2 \sum_{\vec{p}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} + 1},$$

$$E = 2 \sum_{\vec{p}} \frac{\epsilon_{\vec{p}}}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} + 1},$$

wobei μ eliminiert werden soll.

Limes $T \rightarrow 0$: Im Gegensatz zu Bosonen weist ein ideales Fermionensystem keinen Phasenübergang auf, sondern Effekte aus $T \neq 0$ sind in der Regel „kleine Korrekturen“ zum Grenzfall $T = 0$. Wenn $T \rightarrow 0$, läuft $\beta \rightarrow \infty$. Es gilt:



$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} + 1} = \begin{cases} 0, & \epsilon_{\vec{p}} > \mu \\ 1, & \epsilon_{\vec{p}} < \mu \end{cases} = \Theta(\mu - \epsilon_{\vec{p}}),$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln [1 + e^{-\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)}] = \begin{cases} 0, & \epsilon_{\vec{p}} > \mu \\ \beta(\mu - \epsilon_{\vec{p}}), & \epsilon_{\vec{p}} < \mu \end{cases}.$$

D.h. alle Zustände bis zur Fermi-Schale sind voll besetzt.

Nach dem Ersatz $\sum_{\vec{p}} \rightarrow V \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$ können alle Größen bestimmt werden.

Wir bezeichnen den Fermi-Impuls und die Fermi-Energie mit p_F, ϵ_F , wobei

$$\epsilon_F := \frac{p_F^2}{2m} \stackrel{T=0}{=} \mu.$$

Es folgt

$$N = 2V \int_0^{p_F} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi p_F^3}{3}$$

$$\Rightarrow p_F = 2\pi\hbar \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{1/3} = \hbar \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{1/3},$$

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3},$$

Der Index „0“ bezeichnet die Eigenschaften des Grundzustands bei $T=0$.

$$E_0 = 2V \cdot \frac{1}{2m} \int_0^{p_F} \frac{4\pi p^4 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{2\pi p_F^5}{5m} \stackrel{!}{=} \frac{3}{5} N \epsilon_F,$$

$$p_0 = 2 \int_0^{p_F} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \left(\mu - \frac{p^2}{2m} \right) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \frac{4\pi p_F^3}{3} \cdot \frac{p_F^2}{2m} - \frac{2\pi p_F^5}{5m} \right\}$$

$$= \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{4\pi p_F^5}{15m} = \frac{2}{3} \frac{E_0}{V}.$$

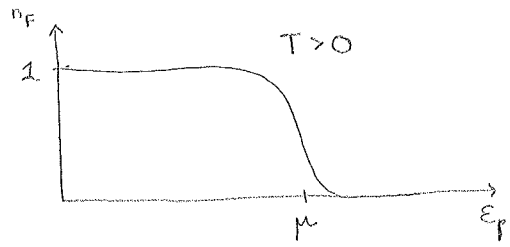
D.h. das System übt einen (grossen) Druck auch bei $T=0$.



Thermische Korrekturen: Wie bei vielen anderen Systemen, ist die Wärmekapazität eine ganz wesentliche Eigenschaft des Systems, weil wir dadurch erfahren können, wieviele und was für Freiheitsgrade es gibt (vgl. Seite 3). Dafür müssen wir die Temperaturabhängigkeit von E bestimmen. Weil N konstant und μ eine Hilfsvariable ist, muss dies ebenfalls für μ gemacht werden.

Im Folgenden definieren wir den Wert von E_F so, dass dieser Temperaturunabhängig ist:

$$E_F := \lim_{T \rightarrow 0} \mu = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3} \quad (\text{vgl. Seite 17}).$$



Bei $T > 0$ wird die Fermi-Kante „unscharf“, und die Integration ist ein wenig mühsam. Wir benutzen dazu die „Sommerfeld-Methode“. Dabei bemerken wir, dass n_F antisymmetrisch um $E_F = \mu$ ist, während für das Integrationsmass dieser Punkt keine besondere Rolle spielt. Es folgt:

$$\frac{N}{V} = 2 \int_0^{\infty} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_F - \mu)} + 1}$$

$$\stackrel{\substack{d\epsilon_F = \frac{p dp}{m} \\ \sqrt{2m\epsilon_F} = p}}{\cong} \frac{4\pi (2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\infty} d\epsilon_F \epsilon_F^{1/2} \underbrace{\left\{ \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_F - \mu)} + 1} - \Theta(\mu - \epsilon_F) + \Theta(\mu - \epsilon_F) \right\}}_{\text{antisymmetrisch um } \mu}$$

Beim ersten Integral entwickeln wir das Gewicht ebenfalls um μ :

$$\epsilon_F^{1/2} = (\mu + \epsilon_F - \mu)^{1/2} = \mu^{1/2} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_F - \mu}{\mu^{1/2}} + \mathcal{O}(\epsilon_F - \mu)^2$$

antisymmetrisch um μ .

Die antisymmetrischen Teile ergeben

$$\frac{1}{2\mu^{1/2}} \int_0^{\infty} d\epsilon_F (\epsilon_F - \mu) \left\{ \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_F - \mu)} + 1} - \Theta(\mu - \epsilon_F) \right\}$$

$$\stackrel{\substack{x := \epsilon_F - \mu \\ \text{benutze Symmetrie} \\ \text{ sowie } \mu \gg T}}{\cong} \frac{1}{2\mu^{1/2}} \int_{-\mu}^{\infty} dx x \left\{ \frac{1}{e^{\beta x} + 1} - \Theta(-x) \right\}$$

$$\cong \frac{1}{\mu^{1/2}} \int_0^{\infty} dx \frac{x}{e^{\beta x} + 1} = \frac{k_B^2 T^2}{\mu^{1/2}} \frac{\pi^2}{12}$$

Beim zweiten Integral entwickeln wir das Ergebnis um E_F :

$$\int_0^{\mu} d\epsilon_F \epsilon_F^{1/2} = \frac{2}{3} \mu^{3/2} = \frac{2}{3} \left\{ \epsilon_F^{3/2} + \frac{3}{2} \epsilon_F^{1/2} (\mu - \epsilon_F) + \dots \right\}$$

Auf der linken Seite schreiben wir

$$\frac{N}{V} \frac{(2\pi\hbar)^3}{4\pi (2m)^{3/2}} = \frac{(2m\epsilon_F)^{3/2}}{\hbar^3} \cdot \frac{1}{3\pi^2} \cdot \frac{(2\pi\hbar)^3}{4\pi (2m)^{3/2}} = \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2}$$

$\frac{N}{V}$ (vgl. Seite 17) \rightarrow

Insgesamt folgt

$$\frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2} = \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2} + \epsilon_F^{1/2} (\mu - \epsilon_F) + \frac{k_B^2 T^2}{\mu^{1/2}} \frac{\pi^2}{12} + \mathcal{O}(\mu - \epsilon_F)^2$$

← kürzen sich
← kann durch ϵ_F ersetzt werden

$$\Rightarrow \mu = \epsilon_F \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right\}$$

Letztendlich müssen wir dasselbe für E/V wiederholen:

$$\frac{E}{V} = \frac{4\pi (2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty d\epsilon_F \epsilon_F^{3/2} \left\{ \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_F - \mu)} + 1} - \theta(\mu - \epsilon_F) + \theta(\epsilon_F - \mu) \right\}$$

Beim ersten Integral entwickeln wir das Gewicht:

$$\epsilon_F^{3/2} = (\mu + \epsilon_F - \mu)^{3/2} = \mu^{3/2} + \frac{3}{2} \mu^{1/2} (\epsilon_F - \mu) + \mathcal{O}(\epsilon_F - \mu)^2$$

Der zweite Term, antisymmetrisch um μ , ergibt den Beitrag

$$\frac{3\mu^{1/2}}{2} \int_0^\infty d\epsilon_F (\epsilon_F - \mu) \left\{ \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_F - \mu)} + 1} - \theta(\mu - \epsilon_F) \right\} \approx \mu^{1/2} \frac{k_B^2 T^2}{4} \frac{\pi^2}{4}$$

← wie auf Seite 18

Beim zweiten Integral entwickeln wir das Ergebnis um ϵ_F :

$$\int_0^\mu d\epsilon_F \epsilon_F^{3/2} = \frac{2}{5} \mu^{5/2} = \frac{2}{5} \left\{ \epsilon_F^{5/2} + \frac{5}{2} \epsilon_F^{3/2} (\mu - \epsilon_F) + \dots \right\}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\frac{E}{V} \approx \frac{4\pi (2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \frac{2}{5} \epsilon_F^{5/2} + \epsilon_F^{3/2} \cdot \left(-\frac{\pi^2}{12} \frac{k_B^2 T^2}{\epsilon_F} \right) + \epsilon_F^{1/2} \frac{\pi^2}{4} \frac{k_B^2 T^2}{\epsilon_F} \right\}$$

← $\mu - \epsilon_F$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} (2m\epsilon_F)^{3/2} \epsilon_F$$

$$= \frac{2}{5} \frac{4\pi p_F^3}{(2\pi\hbar)^3} \epsilon_F = \frac{3}{5} \frac{N}{V} \cdot \epsilon_F = \frac{E_0}{V}$$

← Seite 17

$$\Leftrightarrow \frac{E}{V} \approx \frac{E_0}{V} + \frac{4\pi (2m\epsilon_F)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{\pi^2}{6} \frac{k_B^2 T^2}{\epsilon_F} = \frac{E_0}{V} + \frac{\pi^2}{4} \frac{N}{V} \frac{k_B^2 T^2}{\epsilon_F}$$

$$\frac{4\pi p_F^3}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{3}{2} \frac{N}{V} \quad \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right) \frac{k_B^2 T^2}{\epsilon_F}$$

So ergibt sich die Wärmekapazität als

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T} \Big|_{V,N} = \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B^2 N T}{\epsilon_F} + \mathcal{O} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2$$

Anwendungen:

- * Das ideale Fermi-Gas ist ein gutes Modell für die Leitungselektronen eines Metalls. Insbesondere ist das charakteristische lineare Wachstum von C_V bei niedrigen Temperaturen gut messbar. Aus dem Messwert kann E_F extrahiert werden, und mit der theoretischen Vorhersage verglichen werden.
- * Der grosse Fermi-Druck p_0 (vgl. Seite 17) erklärt qualitativ die Inkompressibilität fester Materie: das Pauli-Prinzip kann nicht verletzt werden. Setzt man $p_F \propto V^{-\frac{1}{3}}$ ein, ist $p_0 \propto p_F^5 \propto V^{-\frac{5}{3}}$, und folglich

$$-\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_T \propto V^{-\frac{8}{3}},$$
 d.h. je grösser desto kleiner das Volumen. Dies ist völlig anders als beim Bose-Gas, vgl. Seite 16.
- * Der Fermi-Druck spielt in einigen Sternsystemen eine wichtige Rolle. Weil $p_0 \propto 1/m$ (vgl. Seite 17), ist der Fermi-Druck aus Elektronen im Prinzip grösser als der von den schwereren Protonen und Neutronen. Der Fermi-Druck der Elektronen verhindert den Gravitationskollaps in „Weissen Zwergen“.
- * In Neutronensternen ist die Fermi-Energie so gross, dass die Elektronen relativistisch sind. Die Reaktion $p^+ + e^- \rightarrow n + \nu_e$ findet effizient statt. In diesem Fall wird Gravitationskollaps vom Fermi-Druck der Neutronen verhindert.
- * Nehmen wir zwei Elektronen aus der Fermi-Schale, mit den Impulsen \vec{p} und $-\vec{p}$ ($|\vec{p}| = p_F$). Dann ist Gesamtimpuls $\approx \vec{0}$, und Gesamtspin ist 0 oder 1, d.h. es geht um ein Boson. Kann es nicht zu einer Kondensierung kommen (vgl. Kapitel 2.3)? Ja! Weil das Elektronenpaar geladen ist, sprechen wir aber nicht vom BEC-Modus (Bose-Einstein-Kondensat), sondern BCS-Modus (Bardeen-Cooper-Schrieffer), d.h. Supraleitung.