2.3 Bose-Einstein-Kondensat [TF 31]

<u>Ausgangspunkt:</u> Laut Seite 11 gilt für Bosonen ($J = -pV$)

$$pV = -k_B T \sum_{\vec p} \ln\left[1 - e^{-\beta(\varepsilon_p - \mu)}\right],$$

$$N = \sum_{\vec p} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu)} - 1},$$

$$E = \sum_{\vec p} \frac{\varepsilon_p}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu)} - 1},$$

wobei μ eliminiert werden soll.

<u>Erster Versuch:</u> Wie bisher, ersetzen wir $\sum_{\vec p} \to V \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi\hbar)^3}$ und betrachten die Beziehung von N und μ:

$$\frac{N}{V} = \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu)} - 1}, \quad \varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

Falls $\mu > 0$,* gibt es einen Pol, und das Integral ist nicht eindeutig definiert. Wir nehmen an, dass $\mu \le 0$ gilt.

* genauer gesagt $\mu > \varepsilon_0$, falls $\varepsilon_0 > 0$, wie z.B. bei $\varepsilon_p = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$

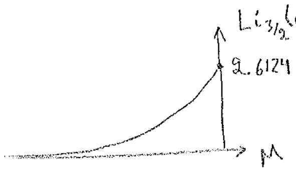
Der Integrand kann als eine geometrische Reihe entwickelt werden:

$$\frac{N}{V} = \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{e^{-\beta(\varepsilon_p - \mu)}}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_p - \mu)}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\beta\mu n} \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{p^2 n}{2mk_B T}}$$

$$= \frac{1}{\lambda^3} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu n}}{n^{3/2}}}, \qquad \lambda = \hbar\sqrt{\frac{2\pi}{mk_B T}}.$$

wie auf Seite 2, aber mit $p = \left(\frac{2mk_BT}{n}\right)^{1/2} x$

Polylogarithmus, $\mathrm{Li}_s(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$. Für $z \to 1$ wird daraus Riemannsche Zeta, $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.



Weil $\mu \le 0$ gilt, ist $e^{\beta\mu} \le 1$. So hat die rechte Seite einen <u>maximalen Wert</u>, gegeben durch $\zeta(3/2) \simeq 2.6124$.

In einem physikalischen System hat die linke Seite N/V einen <u>fixierten Wert</u>. Solange $\frac{N}{V} \le \frac{\zeta(3/2)}{\lambda^3} = \frac{\zeta(3/2)}{\hbar^3}\left(\frac{mk_BT}{2\pi}\right)^{3/2}$ gilt, kann die Gleichung durch einen Wert $\mu \le 0$ gelöst werden. Bei absteigender Temperatur wird dies aber schwieriger. Bei einer <u>kritischen Temperatur</u>

$$k_B T_c := \frac{2\pi}{m}\left[\frac{\hbar^3 N}{\zeta(3/2) V}\right]^{2/3}$$

lautet die Lösung $\mu = 0$. Bei $T < T_c$ gibt es anscheinend keine Lösung mehr. Was passiert?

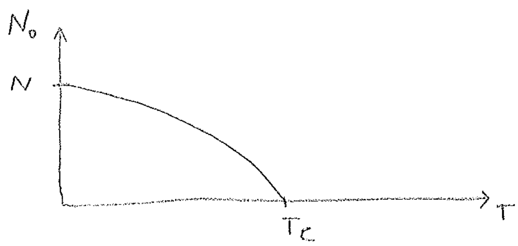
<u>Idee von Einstein:</u> Betrachten wir in der Summe $\sum_{\vec{p}}$ den ortsunabhängigen Modus $\vec{p}=\vec{0}$, genannt <u>Kondensat</u>, separat, und benutzen den Ersatz von der Summe durch ein Integral nur für die Modi $\vec{p} \neq \vec{0}$.
Dann gilt

$$N \approx \underbrace{\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_0-\mu)}-1}}_{=:\, N_0} + \frac{V}{\lambda^3}\, \mathrm{Li}_{3/2}(e^{\beta\mu}) .$$

Bei $\varepsilon_0 = 0, \mu \to 0^-$ divergiert der erste Term. Dies bedeutet, dass <u>ein makroskopischer Anteil der Teilchen sich im quantenmechanischen Grundzustand $\vec{p}=\vec{0}$ befinden.</u>

Im mathematischen Sinne ist μ nicht ganz Null, weil N_0 endlich ist. Wir setzen aber μ auf Null wo möglich, insbesondere im zweiten Term. Im ersten Term benutzen wir nicht mehr μ als Variable, sondern N_0. Mit der Bezeichnung $\frac{N}{V} =: \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_c^3}$, d.h. $\lambda_c = \lambda|_{T=T_c}$, folgt dann

$$N \approx \underset{T \le T_c}{N_0} + \underbrace{\frac{V}{\lambda^3}\zeta(3/2)}_{\frac{V\zeta(3/2)}{\lambda_c^3}\cdot\left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^3 \overset{\lambda\propto T^{-1/2}}{=} N\cdot\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}}$$



$$\Longleftrightarrow \quad N_0 \approx N\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right], \qquad T \le T_c .$$

Bei $T \to 0$ gelangen alle Teilchen im Kondensat $(N_0 \xrightarrow{T\to 0} N)$.

Anscheinend ändert sich das Verhalten des Systems qualitativ bei $T = T_c$. Wir sprechen dann von einem <u>Phasenübergang</u>. Phasenübergänge werden genauer im Kapitel 3 diskutiert (Seiten 29 - 40). Die Bose-Einstein-Kondensation ist ein besonderer Phasenübergang, weil es auch <u>ohne Wechselwirkungen</u>, dank einfach der quantenmechanischen Eigenschaften von Bosonen, stattfindet.

Andere Grössen: Nachdem μ zugunsten von N $(T>T_c)$ bzw. N_0 $(T\leq T_c)$ eliminiert worden ist, können physikalische Grössen bestimmt werden.

* Energie

Weil die Summe auf Seite 13 mit ε_p gewichtet ist, liefert der Grundzustand, mit $\varepsilon_0=0$, keinen Beitrag. Für den Beitrag der anderen Zustände erhalten wir

$$\frac{E}{V} = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\,\frac{p^2}{2m}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\beta\mu n}\, e^{\frac{-p^2 n}{2mk_BT}}$$

Gleichverteilungssatz aus Seite 3, mit „effektiver Temperatur" T/n

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\beta\mu n}\,\frac{3k_BT}{2}\cdot\frac{1}{\lambda^3}\cdot\frac{1}{n^{5/2}}$$

$$= \frac{3k_BT}{2}\,\frac{\mathrm{Li}_{5/2}(e^{\beta\mu})}{\lambda^3}.$$

Bei $T>T_c$ soll $e^{\beta\mu}$ durch N ersetzt werden $\left[e^{\beta\mu} = \mathrm{Li}^{-1}_{3/2}\left(\lambda^3\frac{N}{V}\right)\right]$; bei $T<T_c$ ist $\mathrm{Li}_{5/2}(1)=\zeta(5/2)$.

* Wärmekapazität

Bei $T<T_c$ ist die Bestimmung recht einfach, nachdem wir uns daran erinnern, dass $\lambda\propto T^{-1/2}$:

$$C_V = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{V,N} \underset{E\propto T^{5/2}}{=} \frac{5}{2}\,\frac{E}{T} = \frac{15k_BV}{4}\,\frac{\zeta(5/2)}{\lambda^3}$$

Seite 14: $\frac{V\zeta(3/2)}{\lambda^3} = N\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$

$$= \frac{15k_BN}{4}\,\frac{\zeta(\frac{5}{2})}{\zeta(\frac{3}{2})}\left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

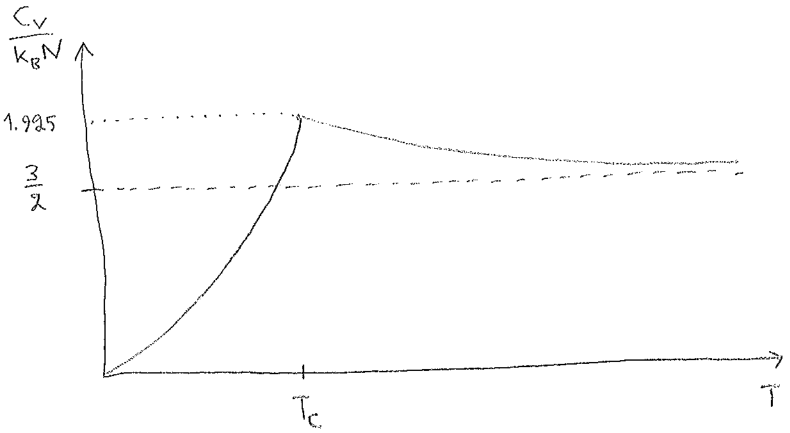
Bei $T>T_c$ gibt es einen zweiten Beitrag, aus der Ableitung von $e^{\beta\mu}$:

$$C_V = \frac{5}{2}\cdot\frac{E}{T} + \frac{3k_BTV}{2\lambda^3}\cdot\frac{\mathrm{Li}'_{5/2}(e^{\beta\mu})}{\underbrace{\mathrm{Li}'_{3/2}(e^{\beta\mu})}_{(\mathrm{Li}^{-1}_{3/2})'}}\cdot\underbrace{\left(-\frac{3}{2}\,\frac{\lambda^3N}{TV}\right)}_{\frac{\partial}{\partial T}\left(\lambda^3\frac{N}{V}\right)}$$

Aus $\mathrm{Li}_s(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^s}$ folgt $\mathrm{Li}'_s(z)=\frac{\mathrm{Li}_{s-1}(z)}{z}$.

So erhalten wir für $T>T_c$

$$C_V = \underbrace{\frac{15k_BN}{4}\cdot\frac{\mathrm{Li}_{5/2}(e^{\beta\mu})}{\mathrm{Li}_{3/2}(e^{\beta\mu})}}_{\frac{5}{2}\frac{E}{T}} - \frac{9k_BN}{4}\,\frac{\mathrm{Li}_{3/2}(e^{\beta\mu})}{\mathrm{Li}_{1/2}(e^{\beta\mu})}$$



Der zweite Term ergibt einen Knick in der Wärmekapazität. Dies ist typisch für Phasenübergänge der „zweiten Ordnung".

* Druck

Der Grundzustand mit $\varepsilon_0 = 0$ hat einen grossen Einfluss auf N, weil $\lim_{\mu \to 0^-} \frac{1}{e^{\beta(-\mu)}-1} = \lim_{\mu \to 0^-} \left(-\frac{k_B T}{\mu}\right) \sim N_0$, aber keinen Einfluss auf E. Wie ist es mit p?

$$p_0 \sim -\frac{k_B T}{V} \ln\left[1 - e^{\beta\mu}\right] \overset{\mu \to 0^-}{\sim} -\frac{k_B T}{V} \underbrace{\ln\left(-\frac{\mu}{k_B T}\right)}_{\sim \frac{1}{N_0}} \sim k_B T \frac{\ln N_0}{V}.$$

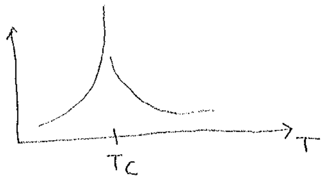
Seite 13

Im thermodynamischen Limes $N, V \to \infty$ ist dies verschwindend klein, weil $\ln N_0$ nur langsam wächst. D.h. auch p wird von den anderen Modi bestimmt. Aufgabe 1 auf Übungsblatt 4 $\Rightarrow$ $p = \frac{2}{3}\frac{E}{V} \underset{T<T_c}{=} k_B T \frac{\zeta(5/2)}{\lambda^3}$.

Folge: $\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T = 0$, d.h. kein Widerstand zur Volumenverringerung! (STI, Seite 37: $\varkappa_T = \infty$.)

Realistische Systeme:

Ein klassisches Beispiel für die Bose-Einstein-Kondensation ist der „λ-Übergang" von flüssigem ^4He bei $T_c = 2.17K$. Allerdings ist dies kein perfektes Beispiel, weil hier Wechselwirkungen eine grosse Rolle spielen. Unter anderem ist die Wärmekapazität divergent, deshalb auch der Name „λ".



Seit 1995 wurde die Bose-Einstein-Kondensation auch in schwach wechselwirkenden Systemen beobachtet, wie verdünnte Gase aus ^{87}Rb oder ^{23}Na-Atomen.*

*Nobel-Preis 2001 an Cornell, Ketterle, Wieman

Die Teilchenzahl ist in diesem Fall eher begrenzt, und auch das Volumen ist nicht unendlich, sondern die Atome werden in einer „Falle" gehalten, ein wenig wie in der Aufgabe 2 vom Übungsblatt 4. Aus diesen Gründen ist der Phasenübergang nicht scharf sondern wird ausgeschmiert.

Sehr schön bei diesen Experimenten ist, dass die Geometrie der Falle geändert werden kann, so können auch effektiv 1- oder 2-dimensionale Kondensate studiert werden, und dass die Stärke und sogar das Vorzeichen (attraktiv/repulsiv) von Wechselwirkungen dank einer „Feshbach-Resonanz" geändert werden können.