Übungen zur statistischen Thermodynamik I	**Blatt Nr. 13**

Aufgabe 1: Bekannt sei $p(T,\mu)$ eines Systems. Betrachtet wird eine adiabatische Änderung des Volumens $\mathrm{d}V$ (z.B. die Expansion des frühen Universums) bei konstanter Teilchenzahl ($\mathrm{d}N = 0$). Ermitteln Sie die entsprechenden $\mathrm{d}T$ und $\mathrm{d}\mu$, ausgedrückt durch die partiellen Ableitungen $p_{T\cdots\mu\cdots} := \partial_T^m \partial_\mu^n p$.

Aufgabe 2: Betrachtet wird ein System, in welchem das Energiespektrum äquidistant ist, d.h. die Energieniveaus verhalten sich wie

$$E_n = n \cdot \varepsilon\ , \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{(vgl. Aufgabe 3 vom Blatt 2)}\ .$$

(a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme für *ein* Teilchen auf der Energieleiter, sowie die relative Schwankung $\Delta E/\langle E\rangle$.

(b) Wir betrachten nun N unterscheidbare Teilchen auf der Energieleiter. Ein Mikrozustand ist charakterisiert durch $\{n_1, \ldots, n_N\}$, $n_a = 0, 1, 2, \ldots$, und die Energie durch $E = \varepsilon \sum_{a=1}^N n_a$. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und ebenfalls $\Delta E/\langle E\rangle$.

Aufgabe 3:

(a) Verifizieren Sie die Gültigkeit der Beziehung $(\Delta N)^2 = k_B T \left.\dfrac{\partial N}{\partial \mu}\right|_{T,V}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\left.\dfrac{\partial N}{\partial \mu}\right|_{T,V} = \dfrac{N^2 \kappa_T}{V}$ gilt, wobei $\kappa_T := -\dfrac{1}{V}\left.\dfrac{\partial V}{\partial p}\right|_{T,N}$ die isothermische Kompressibilität bezeichnet.

(c) Begründen Sie, dass die relative Schwankung der Ordnung $\dfrac{\Delta N}{\langle N\rangle} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\langle N\rangle}}$ ist.

Die Prüfung findet am 08.06.2021 um 13:15 - 15:45 Uhr statt. Keine Hilfsmittel sind erlaubt, aber die folgende Tabelle wird auf dem Prüfungsblatt gegeben:

$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$S(E,V,N) = k_B \ln \Omega(E,V,N)$	$E = TS - pV + \mu N$, $J = -pV$
$\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$	$F(T,V,N) = -k_B T \ln Z(T,V,N)$	$Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$
$\mathrm{d}J = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V - N\mathrm{d}\mu$	$J(T,V,\mu) = -k_B T \ln Y(T,V,\mu)$	$Y = \sum_i \exp(-\beta[E_i - \mu N_i])$
$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$(\partial x/\partial y)_z = -(\partial z/\partial y)_x/(\partial z/\partial x)_y$	$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$
$\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$	$\partial S/\partial V\vert_T = \partial p/\partial T\vert_V$	$\partial E/\partial V\vert_T = T\partial p/\partial T\vert_V - p$