Übungen zur statistischen Thermodynamik I — Blatt Nr. 7

Aufgabe 1: Ein Differenzial $đF = F_1(x,y)\mathrm{d}x + F_2(x,y)\mathrm{d}y$ ist exakt, falls $\int_1^2 đF$ unabhängig vom Integrationsweg ist. Falls $đF$ nicht exakt ist, kann ein integrierender Faktor $\lambda(x,y)$ gefunden werden, so dass $\lambda\, đF = \mathrm{d}f$ exakt ist. So kann jeder $đF$ als $đF = \mathrm{d}f/\lambda$ ausgedrückt werden, wobei sowohl f als auch λ „Zustandsvariablen" sind. Welche von den folgenden Differenzialen sind exakt? Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor für die nicht-exakten Differenziale.

$$đF_a = -\frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \frac{x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\ ,\ đF_b = (y-x^2)\mathrm{d}x + (x+y^2)\mathrm{d}y\ ,\ đF_c = \big(x+\frac{y}{x}\big)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\ .$$

Aufgabe 2: Wir werden uns später mit Legendre-Transformationen beschäftigen (im Kapitel 3.3), so dass einige ihrer Eigenschaften bekannt sein sollten.

(a) Bestimmen Sie die Legendre-Transformierte $g(y) = f(x(y)) - xy$, $y = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$, für die Funktion $f(x) = x^n$. Welche Werte von n sind erlaubt?

(b) Bestimmen Sie die Legendre-Transformierte von $f(x) = \cosh x$.

(c) Zeigen Sie, dass eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer eindeutigen $g(y)$ ist, dass das Vorzeichen von $\mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}x^2$ für alle Werte von x gleich bleibt.

Aufgabe 3: Die Jacobi-Determinante wird mit $\frac{\partial(X,Y)}{\partial(V,W)}$ bezeichnet. Verifizieren Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\left.\dfrac{\partial X}{\partial Y}\right|_Z = \dfrac{\partial(X,Z)}{\partial(Y,Z)}\ .$

(b) $\dfrac{\partial(X,Y)}{\partial(Z,U)} = \dfrac{\partial(X,Y)}{\partial(V,W)}\dfrac{\partial(V,W)}{\partial(Z,U)}\ .$