Übungen zur statistischen Thermodynamik I	**Blatt Nr. 1**

Aufgabe 1: Die Eulersche Gammafunktion kann für $n > -1$ als

$$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n e^{-x}$$

dargestellt werden. Der Integrand kann als $\exp(-x + n \ln x)$ geschrieben werden. Eine Sattelpunktnäherung besteht darin, dass der Exponent um sein Maximum in einer Taylor-Reihe entwickelt wird. Verwenden Sie diese Methode, um die Stirling-Formel herzuleiten:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \,, \quad n \gg 1 \,.$$

[Bemerkung: Für Anwendungen in der statistischen Mechanik sind die Terme $\ln n! \approx n \ln n - n$ ausreichend, weil $\ln \sqrt{2\pi n}$ nur logarithmisch mit n wächst (nicht linear).]

Aufgabe 2: Berechnen Sie $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ und $(\Delta x)^2$ für die folgenden Verteilungen:

(a) Die Gleichverteilung, $P(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall\, x \in [a, b]$.

(b) Die Normalverteilung, $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2}$.

(c) Die Exponentialverteilung, $P(x) = \theta(x) \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}$.

Aufgabe 3: Eine Zufallsvariable erhält mit Wahrscheinlichkeit q den Wert 1 und mit Wahrscheinlichkeit $1-q$ den Wert 0. Betrachtet wird eine Reihe von N Messungen.

(a) Was ist die Wahrscheinlichkeit p_n, dass n-mal der Wert 1 gemessen wird?

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{N} p_n = 1$ gilt.

(c) Eine „generierende Funktion“ wird als $g(\xi) := \sum_{n=0}^{N} e^{n\xi} p_n$ definiert. Bestimmen Sie $g(\xi)$.

(d) Zeigen Sie, dass die generierende Funktion den Mittelwert und die Schwankung als $\langle n \rangle = g'(\xi)|_{\xi=0}$ und $(\Delta n)^2 = [g''(\xi) - (g'(\xi))^2]_{\xi=0}$ liefert.

(e) Rechnen Sie $\langle n \rangle$, $(\Delta n)^2$, sowie die relative Breite $\Delta n / \langle n \rangle$. Wie verhält sich die letztere für $N \to \infty$?