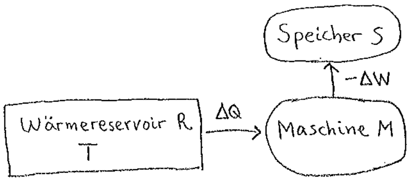
3.5 Wärmekraftmaschinen [TF 19]

Motivation: Die Geschichte der Thermodynamik fing mit Wärmekraftmaschinen an, und noch heute sind viele praktische Anwendungen von derselben Art: Umwandlung von Wärme in Arbeit (Otto-Motor), oder von Arbeit in Abkühlung / Erwärmung (Wärmepumpe). Die Arbeit läuft zyklisch oder kontinuierlich.

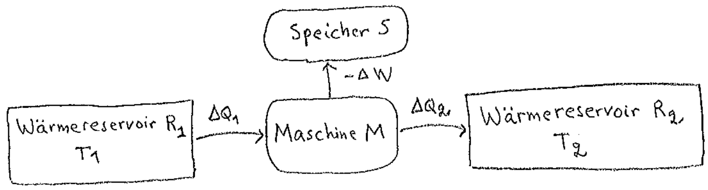
Überblick:

Geht nicht:

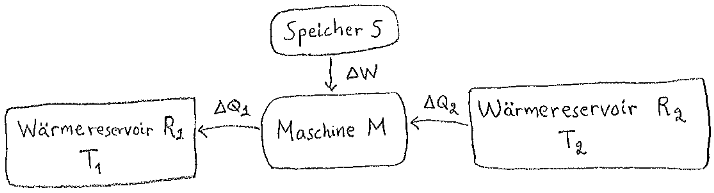


Die erlaubten Prozesse sind zeitumgekehrte Versionen voneinander.

Geht: ($T_1 > T_2$)



Geht auch: ($T_1 > T_2$)



Perpetuum mobile 1. Art $\Delta E \neq 0$ ↯

Perpetuum mobile 2. Art Wir betrachten die erste Variante oben („geht nicht"). Für $\Delta Q = -\Delta W$ wird der 1. Hauptsatz erfüllt: $\Delta E = 0$. Es gibt aber ein Problem mit dem 2. Hauptsatz, denn

$$\Delta S = \underbrace{\Delta S_R}_{-\frac{\Delta Q}{T}} + \underbrace{\Delta S_M}_{\substack{0 \\ \text{(nach einem} \\ \text{vollen Zyklus)}}} + \underbrace{\Delta S_S}_{\substack{0 \\ \text{(„Feder": eindeutiger} \\ \text{Zustand, keine Entropie)}}} < 0 \quad ↯$$

Zur mikroskopischen Interpretation dieses Widerspruchs könnte einiges gesagt werden (vgl. z.B. „Maxwellscher Dämon"), wir lassen es aber sein.

Bemerkung: In die umgekehrte Richtung (Arbeit zur Wärme) kann der erste Prozess ohne Probleme laufen; so kann ein elektrischer Heizkörper Wärme produzieren ($\Delta S > 0$).

Wirkungsgrad: Betrachtet wird die zweite Variante auf Seite 41.

Laut dem 1. Hauptsatz gilt

$$\Delta E_M = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 + \Delta W \overset{\text{nach einem vollen Zyklus}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta W = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 .$$

Laut dem 2. Hauptsatz gilt

$$\Delta S = \underbrace{\Delta S_{R_1}}_{-\frac{\Delta Q_1}{T_1}} + \underbrace{\Delta S_{R_2}}_{\frac{\Delta Q_2}{T_2}} + \underbrace{\Delta S_M}_{\substack{0 \\ \text{(nach einem} \\ \text{vollen Zyklus)}}} + \underbrace{\Delta S_S}_{\substack{0 \\ \text{(„Feder“;} \\ \text{keine Entropie)}}} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta Q_2}{T_2} \geq \frac{\Delta Q_1}{T_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1} .$$

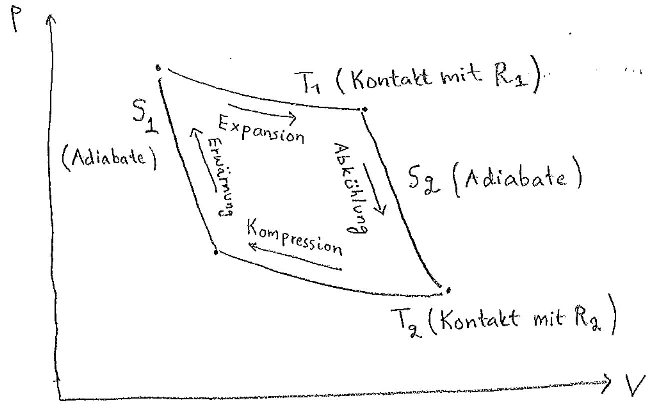
Ein Wirkungsgrad wird definiert als

$$\eta := \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{Wärme-Einfuhr}} = \frac{-\Delta W}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q_1 - \Delta Q_2}{\Delta Q_1} = 1 - \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Bei einer „idealen/perfekten" Maschine gilt die Gleichheit.

Check: $T_1 = T_2 \Rightarrow \eta = 0$ ok!

Beispiel/1: Carnot-Prozess:



Dies kann funktionieren, weil Isothermen und Adiabaten nicht parallel miteinander sind (vgl. Seiten 31-32).

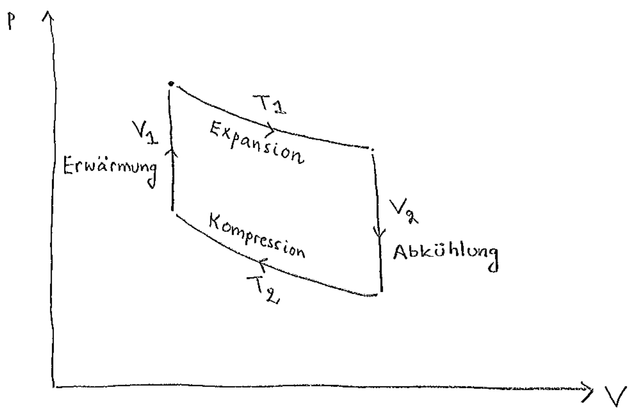
Weil Entropie eine Zustandsgrösse ist, gilt nach einem vollen Zyklus $\Delta S_M = 0$.

Trotzdem kann Arbeit geleistet werden:

$$-\Delta W = \oint p\,dV = \text{abgeschlossene Fläche} \neq 0 \,!$$

Mehr dazu in der Aufgabe 1 auf Übungsblatt 11.

Beispiel 12: **Stirling-Prozess**



Berechnen wir die Beiträge der einzelnen Teilprozesse für ein ideales Gas ($pV = Nk_BT$).

(i) Expansion:
$$\Delta W_a = -\int_{V_1}^{V_2} p\,dV = -\int_{V_1}^{V_2} Nk_B T_1 \frac{dV}{V} = Nk_B T_1 \ln\frac{V_1}{V_2}$$
$$\Delta Q_a = T_1 \int_{V_1}^{V_2} \underbrace{\frac{\partial S}{\partial V}\Big|_T}_{\frac{\partial p}{\partial T}\big|_V = \frac{Nk_B}{V}} dV = T_1 \int_{V_1}^{V_2} Nk_B \frac{dV}{V} = Nk_B T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$$
(M2 auf Seite 34)

(ii) Abkühlung:
$$\Delta W_b = 0 \quad , \quad \text{denn } dV = 0$$
$$\Delta Q_b = \int_{T_1}^{T_2} T \frac{\partial S}{\partial T}\Big|_V dT = \int_{T_1}^{T_2} C_V(T)\,dT$$

(iii) Kompression:
$$\Delta W_c = -\int_{V_2}^{V_1} p\,dV = (\text{wie oben}) = Nk_B T_2 \ln\frac{V_2}{V_1}$$
$$\Delta Q_c = T_2 \int_{V_2}^{V_1} \frac{\partial S}{\partial V}\Big|_T dV = (\text{wie oben}) = Nk_B T_2 \ln\frac{V_1}{V_2}$$

(iv) Erwärmung:
$$\Delta W_d = 0$$
$$\Delta Q_d = \int_{T_2}^{T_1} T \frac{\partial S}{\partial T}\Big|_V dT = \int_{T_2}^{T_1} C_V(T)\,dT$$

Geleistete Arbeit: $-\Delta W = -(\Delta W_a + \Delta W_b + \Delta W_c + \Delta W_d) = Nk_B(T_1 - T_2)\ln\frac{V_2}{V_1}$

Laut Seite 35 ist $C_V(T,V_2) = C_V(T,V_1) + T\int_{V_1}^{V_2} dV' \underbrace{\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\Big|_{V'}}_{\text{verschwindet für ideales Gas}}$

Änderung der Entropie:
$$\Delta S = \frac{\Delta Q_a}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial S}{\partial T}\Big|_V dT + \frac{\Delta Q_c}{T_2} + \int_{T_2}^{T_1} \frac{\partial S}{\partial T}\Big|_V dT$$
$$= Nk_B\left(\ln\frac{V_2}{V_1} + \ln\frac{V_1}{V_2}\right) + \left(\int_{T_1}^{T_2} + \int_{T_2}^{T_1}\right) dT\,\frac{C_V(T)}{T} = 0.$$

Wirkungsgrad:
$$\eta = \frac{-\Delta W}{\Delta Q_a} = \frac{Nk_B(T_1 - T_2)\ln\frac{V_2}{V_1}}{Nk_B T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

$\Rightarrow$ es geht um eine ideale Maschine!

Wärmepumpe: Betrachtet wird die dritte Variante auf Seite 41.

Laut dem 1. Hauptsatz gilt

$$\Delta E_M = \Delta Q_2 + \Delta W - \Delta Q_1 \overset{\text{nach einem vollen Zyklus}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta W = \Delta Q_1 - \Delta Q_2$$

Laut dem 2. Hauptsatz gilt

$$\Delta S = \underbrace{\Delta S_{R_1}}_{\frac{\Delta Q_1}{T_1}} + \underbrace{\Delta S_{R_2}}_{-\frac{\Delta Q_2}{T_2}} + \underbrace{\Delta S_M}_{0} + \underbrace{\Delta S_S}_{0} \geq 0$$

(nach einem vollen Zyklus) („Feder": keine Entropie)

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta Q_1}{T_1} \geq \frac{\Delta Q_2}{T_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} \leq \frac{T_2}{T_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} \geq \frac{T_1}{T_2}.$$

Bei einem Heizgerät ist der Nutzen ΔQ_1. Folglich definieren wir den Wirkungsgrad als

$$\bar{\eta} := \frac{\Delta Q_1}{\Delta W} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_1 - \Delta Q_2} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1}} \leq \frac{1}{1 - \frac{T_2}{T_1}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

z.B. $T_1 = 50°C$, $T_2 = 10°C$ (10m unter Erdoberfläche)

$$\Rightarrow \bar{\eta}_{max} \approx \frac{323\,K}{40\,K} \approx 8.$$

Dies ist viel besser als die direkte Umwandlung von Arbeit in Wärme (z.B. mit einem Heizkörper).

Bei einem Kühlschrank ist der Nutzen ΔQ_2. Sinngemäss wird der Wirkungsgrad definiert als

$$\tilde{\eta} := \frac{\Delta Q_2}{\Delta W} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1 - \Delta Q_2} = \frac{1}{\frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} - 1} \leq \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

z.B. $T_1 = 25°C$, $T_2 = 0°C$

$$\Rightarrow \tilde{\eta}_{max} \approx \frac{273\,K}{25\,K} \approx 11.$$