

**Aufgabe 1: Impulsoperator in Fock-Raum-Notation.** Die (klassische) Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes lautet

$$\vec{g}_{\text{em}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c},$$

und der Gesamtimpuls beträgt  $\vec{p}_{\text{em}} = \int_V d^3\vec{x} \vec{g}_{\text{em}}$ . Die kanonisch quantisierten Operatoren sind

$$\begin{aligned}\hat{E}(\vec{x}) &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar}{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{\lambda} i\omega_{\vec{k}} \left( \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \hat{a}_{\vec{k},\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \text{H.c.} \right), \\ \hat{B}(\vec{x}) &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar}{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \sum_{\lambda'} i c \vec{q} \times \left( \vec{e}_{\vec{q},\lambda'} \hat{a}_{\vec{q},\lambda'} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} - \text{H.c.} \right).\end{aligned}$$

Setzen Sie  $\hat{E}, \hat{B}$  im Ausdruck von  $\vec{p}_{\text{em}}$  ein und bestimmen Sie dadurch  $\hat{p}_{\text{em}}$ . [Den Vakuumteil dürfen Sie vernachlässigen.]

**Aufgabe 2: Vertauschung von Impulsoperator mit Feldoperator.** Betrachtet werden die Fock-Raum-Operatoren

$$\hat{H}_{\text{em}} = \int d^3\vec{k} \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \quad \hat{p}_{\text{em}} = \int d^3\vec{k} \sum_{\lambda} \hbar\vec{k} \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k},\lambda}$$

sowie der Feldoperator (in der Strahlungseichung)

$$\hat{A}_I(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar}{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \sum_{\lambda'} c \left( \vec{e}_{\vec{q},\lambda'} \hat{a}_{\vec{q},\lambda'} e^{-i\omega_{\vec{q}}t + i\vec{q}\cdot\vec{x}} + \text{H.c.} \right).$$

Verifizieren Sie die Gültigkeit folgender Beziehungen:

$$i\hbar\partial_t \hat{A}_I(\vec{x}, t) = [\hat{A}_I(\vec{x}, t), \hat{H}_{\text{em}}]; \quad -i\hbar\partial_j \hat{A}_I(\vec{x}, t) = [\hat{A}_I(\vec{x}, t), \hat{p}_{\text{em},j}], \quad j = 1, 2, 3.$$

[Diese bedeuten, dass der Hamilton-Operator die Zeitentwicklung „erzeugt“, während der Impuls-Operator dasselbe für Translationen tut.]