Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 11**

Aufgabe 1: Kommutatoren für ein komplexes Klein-Gordon-Feld. Für ein komplexes Klein-Gordon-Feld $\varphi \in \mathbb{C}$ kann eine „Dichte" definiert werden,

$$\rho := \frac{i\hbar}{2mc^2}(\varphi^* \partial_t \varphi - \varphi\, \partial_t \varphi^*) \ .$$

(a) Seien jetzt φ, φ^* durch die Feldoperatoren $\hat{\varphi}_I, \hat{\varphi}_I^\dagger$ ersetzt, wobei

$$\hat{\varphi}_I(\vec{x}, t) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_{\vec{k}}}} \left(\hat{a}_{\vec{k}}\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{b}^\dagger_{\vec{k}}\, e^{i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) ,$$

und $[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}] = [\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}^\dagger_{\vec{q}}] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q})$, $[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{b}^\dagger_{\vec{q}}] = 0$, usw. Ermitteln Sie $\hat{Q} := \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, \hat{\rho}$ als Funktional von $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{b}, \hat{b}^\dagger$, und schlagen Sie folglich eine physikalische Interpretation der Ladung $\hat{Q}$ sowie der von $\hat{a}^\dagger$, $\hat{b}^\dagger$ erzeugten Teilchen vor.

(b) Bestimmen Sie auch den „gleichzeitigen" Kommutator $\frac{1}{c^2}[\hat{\varphi}_I(\vec{x}, t), \partial_t \hat{\varphi}_I^\dagger(\vec{y}, t)]$.

Aufgabe 2: Vollständigkeit der Polarisationsvektoren. Verifizieren Sie die Gültigkeit (in der „Strahlungseichung") der Beziehung

$$\sum_\lambda e^m_{\vec{k},\lambda} e^{n*}_{\vec{k},\lambda} = \delta^{mn} - \frac{k^m k^n}{\vec{k}^2} \ ,$$

wobei $m, n \in \{1, 2, 3\}$ normale Vektorindizes sind, indem Sie:

(a) die Richtung von $\vec{k}$ als z-Achse wählen und eine „linear polarisierte" Basis betrachten, d.h. $\vec{e}_{\vec{k},1} := \vec{e}_x$, $\vec{e}_{\vec{k},2} := \vec{e}_y$.

(b) die Richtung von $\vec{k}$ als z-Achse wählen und eine „zirkular polarisierte" Basis betrachten, d.h. $\vec{e}_{\vec{k},+} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\,\vec{e}_y)$, $\vec{e}_{\vec{k},-} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - i\,\vec{e}_y)$.

(c) aus den Definitionen $\vec{k} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\lambda} = 0$, $\vec{e}_{\vec{k},\lambda} \cdot \vec{e}^*_{\vec{k},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}$ sowie den allgemeinen Eigenschaften des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ heraus argumentieren. [Hier können Sie $\vec{e}_{\vec{k},\lambda}$ als reell betrachten.]