Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 10**

Aufgabe 1: Supraleitender Wirbel (erste Skizze). Ein Magnetfeld sei auf der z-Achse lokalisiert:

$$\vec{B} := \Phi_B\, \delta(x)\, \delta(y)\, \vec{e}_z \ ,$$

wobei $\Phi_B = \int \mathrm{d}^2\vec{x} \cdot \vec{B}$ den magnetischen Fluss durch die (x, y)-Ebene bezeichnet. Der Fluss sei von der „Materie“ um den Wirbel erzeugt worden, d.h. ohne externe Kraft oder Strom.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{B}$ bei $\rho > 0$ durch das Vektorpotential $\vec{A} = \frac{\Phi_B}{2\pi}\nabla\varphi$ dargestellt werden kann, wobei ρ und φ die bekannten Zylinderkoordinaten bezeichnen.

(b) In einer Transformation ändert sich das Vektorpotential als $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$. Die Wahl $\chi = -\Phi_B\, \varphi/2\pi$ lässt das Vektorpotential und folglich den Fluss verschwinden (diese ist enggenommen keine Eichtransformation, weil auch physikalische Grössen geändert werden). Die Wellenfunktion der Materie um den Wirbel ändert sich als $\psi' = \exp(\frac{iq\chi}{\hbar c})\psi$; ψ' entspricht also Wellenfunktion ohne Fluss, ψ Wellenfunktion mit Fluss. Verwenden Sie die Eindeutigkeit beider Wellenfunktionen um zu argumentieren, dass ein „selbstgenerierter“ Φ_B in Einheiten von $\Phi_0 = hc/q$ quantisiert ist.

Aufgabe 2: Supraleitender Wirbel (zweite Skizze).

(a) Um das Problem der Aufgabe 1 zu „regularisieren“ könnte $\delta(x)\delta(y)$ durch $\theta(\rho_0 - \rho)/\pi\rho_0^2$ ersetzt werden, wobei $\vec{B}$ für $\rho < \rho_0$ konstant sei. Ermitteln Sie $\vec{A}$ für $\forall\rho$ in diesem Fall.

(b) Laut Aufgabe 8.1 beträgt Wahrscheinlichkeitsstrom im äusseren Feld

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left[\psi^*\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right)\psi\right] \ .$$

Betrachtet wird eine Geometrie wie im Punkt (a), wobei die Lage zylindersymmetrisch ist, und $\vec{B} = \vec{0}$ bei $\rho > \rho_0$. Das System sei im Eigenzustand von $\hat{L}_z$. Zeigen Sie, dass die Komponente $j_\varphi(\rho > \rho_0)$ genau dann verschwindet, wenn $q\Phi_B/hc$ ganzzahlig ist.