Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 9**

Aufgabe 1: Zeeman-Effekt. Wenn ein Teilchen Spin hat, dann ist der Hamilton-Operator im äusseren Feld der Form

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\Big[-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\Big]^2 + q\phi(\vec{r},t) - \frac{q\,g}{2mc}\hat{\vec{S}}\cdot\vec{B}\,, \quad \vec{B} = \mathrm{const}\,,$$

wobei $\hat{\vec{S}}$ den Spin-Operator und g den „gyromagnetischen Faktor“ bezeichnen.

(a) Verwenden Sie die Eichwahl in der Aufgabe 8.2, um den Hamilton-Operator in folgender Form auszudrücken:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{q}{2mc}(\hat{\vec{L}} + g\,\hat{\vec{S}})\cdot\vec{B} + \frac{q^2B^2\,\hat{\vec{r}}_\perp^2}{8mc^2}\,.$$

(b) Berechnen Sie den sogenannten Zeeman-Effekt (die Änderung des Energie-Eigenwerts) für ein Elektron mit Wellenfunktion $\psi = e^{-r/a}/\sqrt{\pi a^3}$ und Spineigenwert m_s, zur ersten Ordnung in zeitunabhängiger Störungstheorie. [Hinweis: $\int_0^\infty \mathrm{d}r\, e^{-\alpha r} r^n = n!/\alpha^{n+1}$.]

Aufgabe 2: Aharonov-Bohm-Effekt.

(a) Wenn ein Vektorpotential existiert, wird der Impulsoperator bekannterweise durch $\hat{\vec{p}}_{\vec{A}} \equiv \hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}$ ersetzt. Ermitteln Sie die Eigenzustände von $\hat{\vec{p}}_{\vec{A}}$ ($\hat{\vec{p}}_{\vec{A}}|\vec{p}\rangle = \vec{p}|\vec{p}\rangle$) in der Ortsdarstellung. [Antwort: $\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = C\exp\{\frac{i}{\hbar}[\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) + \frac{q}{c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}\mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{A}(\vec{s},t)]\}$.]

(b) Unter welchen Umständen ist $I := \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}\mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{A}(\vec{s},t)$ unabhängig vom Integrationsweg?

(c) Ein Teilchenstrahl streut an einer unendlich langen harten Spule; durch die Spule läuft ein magnetischer Fluss Φ_B. In einer bestimmten Näherung („eikonale“ bzw. „semiklassische“ bzw „WKB“-Näherung; entspricht dem Limes der geometrischen Optik in der Elektrodynamik) kann die Wellenfunktion hinter der Spule als $\psi = \psi^{(a)} + \psi^{(b)}$ ausgedrückt werden, wobei $\psi^{(a)}$ und $\psi^{(b)}$ Eigenzustände von $\hat{\vec{p}}_{\vec{A}}$ sind und als Wege die kürzesten Wege an beiden Seiten der Spule gewählt werden. Zeigen Sie, dass hinter der Spule eine flussabhängige „Interferenz“ beobachtet wird, d.h. $|\psi|^2 \propto 1 + \cos(\varphi_0 + \frac{q\Phi_B}{\hbar c})$.