Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 8**

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeitsstrom im äusseren Feld. Zeigen Sie, dass für ein Teilchen der Masse m und Ladung q im elektromagnetischen Feld die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

mit

$$\rho = |\psi|^2 \,, \quad \vec{j} = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left[\psi^* \left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right)\psi\right]$$

gilt. Wie verhalten sich ρ und $\vec{j}$ bei (lokalen) Eichtransformationen?

Aufgabe 2: Landau-Niveaus in Zylinderkoordinaten. Betrachten Sie geladene Teilchen im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$. Das System wird durch die folgenden Vektor- und Skalarpotentiale beschrieben:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} \,, \quad \phi = 0 \,.$$

(a) Ermitteln Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung in Zylinderkoordinaten.

(b) Der Drehimpulsoperator in z-Richtung lautet

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \,.$$

Zeigen Sie, dass $\hat{L}_z$ mit $\hat{H}$ vertauscht, und dass deshalb die Energie-Eigenzustände durch die Quantenzahl $m_z \in \mathbb{Z}$, mit $\hat{L}_z|m_z\rangle = \hbar\, m_z|m_z\rangle$, charakterisiert werden können.

(c) Zeigen Sie, dass wenn $\hbar m_z$ gross genug ist, um durch einen „klassischen Drehimpulswert“ ersetzt zu werden, d.h. $\hbar m_z \to m|\vec{v}_\perp| r_B = m r_B^2 \omega_B$, wobei

$$\omega_B := \frac{qB}{mc}$$

die klassische Zyklotronfrequenz bezeichnet, dann ist die Wellenfunktion bei Abstand $\rho \sim r_B$ lokalisiert, wie auch klassisch erwartet. [Hinweis: Idenitifizieren Sie ein „effektives Potential“ in der radialen Schrödinger-Gleichung und minimisieren Sie dieses.]