

Aufgabe 1: Streuphasen für das Yukawa-Potential. In der Bornschen Näherung wurde für die Streuamplitude $f(\theta, k)$ ($\langle \vec{x} | \vec{k} \rangle \propto e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + f(\theta, k) \frac{e^{ikr}}{r}$) des Yukawa-Potentials ($V(\vec{r}) := \frac{\alpha e^{-\mu r}}{r}$) das folgende Ergebnis gefunden:

$$f(\theta, k) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2[\mu^2 + 2k^2(1 - \cos \theta)]}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die entsprechenden Streuphasen im „infraroten Limes“, d.h. $k/\mu \ll 1$, als

$$\delta_l(k) \propto \left(\frac{k}{\mu}\right)^{2l+1}$$

verschwinden. [Hinweis: ein Polynom der Ordnung l in $\cos \theta$ kann als Linearkombination von $P_k(\cos \theta)$, $k \leq l$, ausgedrückt werden.]

- (b) Bestimmen Sie die Streulänge $a := -\lim_{k \rightarrow 0} [\sin \delta_0(k)/k]$ und zeigen Sie anhand dieses Beispiels, dass a für ein abstossendes Potential positiv ist, für ein anziehendes negativ.
- (c) Vergleichen Sie den Niederenergielimes $\lim_{k \rightarrow 0} \sigma = 4\pi a^2$ mit einer expliziten Berechnung (ohne Partialwellenentwicklung) derselben Grösse aus $f(\theta, k)$.

Aufgabe 2: s -Wellenstreuung an einer harten Kugel. Betrachten Sie die s -Wellen ($l = 0$) -Streuung an einer harten Kugel mit Radius R (d.h. $V(r) = \infty$, $r \leq R$; $V(r) = 0$, $r > R$).

- (a) Machen Sie den Ansatz

$$\frac{e^{ikr}}{r} e^{2i\delta_0} - \frac{e^{-ikr}}{r}$$

für die Wellenfunktion ausserhalb der Kugel und bestimmen Sie die Streuphase δ_0 .

- (b) Laut Skript können alle Streuphasen aus der Gleichung

$$\tan \delta_l(k) = \frac{j_l(kR)}{n_l(kR)}$$

bestimmt werden, wobei j_l, n_l sphärische Bessel- und Neumann-Funktionen sind. Skizzieren Sie, am Besten durch eine exakte numerische Lösung, $\sin^2 \delta_l(k)$ als Funktion von l für $kR = 1, 5, 10$, und zeigen Sie dadurch, dass nur l -Werte bis $l \sim kR$ wichtig sind, aber dass im Bereich $l < kR$ die $\sin^2 \delta_l(k)$ keine monotonen Funktionen von l sind. [Hinweis: in Mathematica ist $j_l \leftrightarrow \text{SphericalBesselJ}$, $n_l \leftrightarrow \text{SphericalBesselY}$.]