Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 4**

Aufgabe 1: Retardierte Greensche Funktion. Betrachtet wird die formale Struktur

$$\hat{G}_0(t;t_0) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}E}{2\pi\hbar} \, \frac{e^{-\frac{iE(t-t_0)}{\hbar}}}{E - \hat{H}_0 + i0^+} \; ,$$

wobei $\hat{H}_0$ ein hermitescher Operator ist, d.h. reelle Eigenwerte hat. Es ist leicht sich davon zu überzeugen, dass wenn $\hat{G}$ auf einen Eigenzustand von $\hat{H}_0$ operiert, kann folglich $\hat{H}_0$ durch den entsprechenden Eigenwert ersetzt werden; $\hat{G}_0$ wird also am besten in der Basis der Eigenzuständen von $\hat{H}_0$ dargestellt.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{G}_0$ der folgenden Gleichung genügt:

$$(i\hbar\partial_t - \hat{H}_0)\hat{G}_0(t;t_0) = \hat{\mathbb{1}}\,\delta(t-t_0) \; .$$

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{G}_0$ ein „retardierter" Operator ist; d.h., dass $\hat{G}_0$ für $t < t_0$ ein Nulloperator ist, während $\hat{G}_0$ für $t \geq t_0$ eine nichttriviale Wirkung haben kann.

(c) Führen Sie im Falle $t > t_0$ die Integration durch, und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem bekannten Ausdruck des Zeitentwicklungsoperators.

Aufgabe 2: Greensche Funktionen bei Differenzialgleichungen zweiter Ordnung. Betrachtet werden zwei Greensche Funktionen („retardiert" bzw. „zeitgeordnet"):

$$G_R(t,t') := \frac{\hbar}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\nu}{2\pi} \frac{e^{-i\nu(t-t')}}{\omega^2 - (\nu + i0^+)^2} \; , \quad G_T(t,t') := \frac{\hbar}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\nu}{2\pi} \frac{e^{-i\nu(t-t')}}{\omega^2 - \nu^2 - i0^+} \; .$$

(a) Zeigen Sie, dass die beiden die Differenzialgleichung $(\partial_t^2 + \omega^2)G = \frac{\hbar}{m}\delta(t-t')$ erfüllen.

(b) Ermitteln Sie die expliziten Ausdrücke von G_R und G_T, und verifizieren Sie, dass ihr Unterschied der homogenen Gleichung $(\partial_t^2 + \omega^2)(G_T - G_R) = 0$ genügt.
[Antwort: $G_R = \frac{\hbar\,\theta(t-t')\sin\omega(t-t')}{m\omega}$, $G_T = \frac{i\hbar\, e^{-i\omega|t-t'|}}{2m\omega}$.]