Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 3**

Aufgabe 1: Fermi-Regel mit zeitabhängiger Störung. Der Hamilton-Operator sei der Form

$$\hat{H} := \hat{H}_0 + \hat{V}(t) \;, \quad \hat{V}(t) := \hat{V}\,\theta(t)\sin(\omega t) \;.$$

(a) Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Übergangsrate $\Gamma_{\mathsf{fi}}(t)$ zur führenden Ordnung in $\hat{V}$.

(b) Die folgende Formel kann in der Literatur gefunden werden:

$$\Gamma_{\mathsf{fi}} = \lim_{t\to\infty} \Gamma_{\mathsf{fi}}(t) = \frac{\pi}{2\hbar} |\langle f_I|\hat{V}|i_I\rangle|^2 \Big[\delta(E_{\mathsf{f}} - E_{\mathsf{i}} - \hbar\omega) + \delta(E_{\mathsf{f}} - E_{\mathsf{i}} + \hbar\omega)\Big] \;.$$

Können Sie diese Formel begründen?

(c) Wie verhält sich $\Gamma_{\mathsf{fi}}(t)$ in führender Ordnung der Taylor-Entwicklung in kleiner t?

Aufgabe 2: Photoeffekt in Dipolnäherung. In der Vorlesung wurde die folgende Formel für den Absorptionsquerschnitt in ebener Welle (mit Kreisfrequenz ω und Polarisationsvektor $\vec{e}_\lambda$; der Wellenvektor $\vec{k}$ wird in führender Ordnung behandelt, d.h. $\exp(i\vec{k}\cdot\hat{\vec{x}}) \approx \mathbb{1}$) gefunden:

$$\sigma_{\mathsf{fi}}^{\mathsf{abs}} \approx \frac{4\pi^2 q^2}{m^2 \omega c} \Big|\langle f_I|\vec{e}_\lambda \cdot \hat{\vec{p}}|i_I\rangle\Big|^2 \delta(E_{\mathsf{f}} - E_{\mathsf{i}} - \hbar\omega) \;.$$

Sei $|i_I\rangle$ der Grundzustand eines wasserstoffähnlichen Atoms,

$$\langle \vec{r}|i_I\rangle := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a}\right)^{3/2} e^{-Zr/a} \;,$$

wobei a den Bohrschen Radius bezeichnet, und $|f_I\rangle$ ein Impulszustand in Würfelnormierung,

$$\langle \vec{r}|f_I\rangle := \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}_{\mathsf{f}}\cdot\vec{r}} \;.$$

Bestimmen Sie den differenziellen Absorptionsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma_{\mathsf{fi}}^{\mathsf{abs}}/\mathrm{d}\Omega_{\mathsf{f}}$, indem Sie $\delta(E_{\mathsf{f}} - E_{\mathsf{i}} - \hbar\omega)$ durch die Zustandsdichte $\mathrm{d}N_{\mathsf{f}}/\mathrm{d}E_{\mathsf{f}}$ ersetzen, sowie den Gesamtabsorptionsquerschnitt $\sigma_{\mathsf{fi}}^{\mathsf{abs}} = \int \mathrm{d}\Omega_{\mathsf{f}}\,\mathrm{d}\sigma_{\mathsf{fi}}^{\mathsf{abs}}/\mathrm{d}\Omega_{\mathsf{f}}$. In welche Richtung bewegen sich die meisten befreiten Elektronen?
[Hinweis: $\int \mathrm{d}^3\vec{r}\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} e^{-Zr/a} = \frac{8\pi a^3 Z}{(Z^2 + a^2 q^2)^2}$.]