## 6.2 Strahlung als Photonen [Schwabl 14.4]

Skalarfeld: (Seite 83)

$$L = \int_V d^3\vec{x}\ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{c^2}(\partial_t\varphi)^2 - |\nabla\varphi|^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^2\right\}$$

$\Rightarrow$ klassisch: $\varphi(\vec{x},t) = \sqrt{\hbar c^2}\int\frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\omega_{\vec{k}}}}\left\{a_{\vec{k}}\,e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^*_{\vec{k}}\,e^{i\omega_{\vec{k}}t-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right\}$

$\Rightarrow$ quantisiert: $E_k = \hbar\omega_{\vec{k}}(n_k+\frac{1}{2})$ ; $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{(kc)^2+\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2}$ ; $n_k = 0,1,2,\ldots$

Jetzt: (Seiten 85-86)

$$L_{em} = \frac{1}{4\pi c^2}\int_V d^3\vec{x}\ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left\{(\partial_t A_j)^2 - c^2|\nabla A_j|^2\right\}_{\nabla\cdot\vec{A} = |\nabla\phi| = 0},$$

$$H_{em} = \frac{1}{4\pi c^2}\int_V d^3\vec{x}\ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left\{(\partial_t A_j)^2 + c^2|\nabla A_j|^2\right\}_{\nabla\cdot\vec{A} = |\nabla\phi| = 0}.$$

Aus einem Vergleich zwischen $L$ und $L_{em}$ ist klar, dass es sich um ein System von Teilchen mit $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$ handelt. Aber wie konstruiert man den entsprechenden Operator $\hat{H}_{em}$?

Arbeitsplan:

(i) nehme allgemeine klassische Lösung wie durch $L_{em}$ bestimmt; errate günstige Schreibweise.

(ii) Setze diese in $H_{em}$ ein, um $H_{em}$ so umzuschreiben, dass die gewünschte Form auftaucht.

man muss etwas „tun"; $\hat{\varphi}\to\varphi$ kann hergeleitet werden, $\varphi\to\hat{\varphi}$ nicht!

(iii) „quantisiere", d.h. ersetze komplexe Koeffizienten durch Operatoren, so dass $\hat{H}_{em}$ richtig aussieht.

(iv) checke, dass daraus „familiäre" Vertauschungsrelationen folgen, d.h. Verallgemeinerungen von $[\hat{x}_j,\hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$.

((v) um ganz sicher zu sein, nehme gefundene „Fock-Raum"-$\hat{H}_{em}$; pfadintegralquantisiere; und checke dass die alte $L_{em}$ wieder rauskommt.)

(i) Klassische Lösung:

Wir betrachten direkt den thermodynamischen Limes, $V\to\infty$.

Sei $\int_{\vec{x}} := \int d^3\vec{x}$ ; $\int_{\vec{k}} := \int\frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\omega_{\vec{k}}}}$

Ansatz:
$$\vec{A}(\vec{x},t) = \sqrt{4\pi c^2\hbar}\int_{\vec{k}}\sum_\lambda\left\{\vec{e}_{\vec{k},\lambda}\,a_{\vec{k},\lambda}\,e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\,a^*_{\vec{k},\lambda}\,e^{i\omega_{\vec{k}}t-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right\},$$

wobei $\lambda = 1,2$ und die Polarisationsvektoren die normalen Eigenschaften besitzen: $\vec{k}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda} = 0$, $\vec{e}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}$.

**(ii) Es folgt:**

$$H_{em} = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{\vec{x}} \frac{1}{2} \left\{ \partial_t \vec{A} \cdot \partial_t \vec{A} + c^2 \sum_{j=1}^{3} \partial_j \vec{A} \cdot \partial_j \vec{A} \right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \iint_{\vec{k}\,\vec{q}} \sum_{\lambda,\lambda'} \int_{\vec{x}} \Big\{ \left[ -i\omega_{\vec{k}}\, \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\, a_{\vec{k},\lambda}\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + i\omega_{\vec{k}}\, \vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\, a^*_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$
$$\cdot \left[ -i\omega_{\vec{q}}\, \vec{e}_{\vec{q},\lambda'}\, a_{\vec{q},\lambda'}\, e^{-i\omega_{\vec{q}} t + i\vec{q}\cdot\vec{x}} + i\omega_{\vec{q}}\, \vec{e}^{\,*}_{\vec{q},\lambda'}\, a^*_{\vec{q},\lambda'}\, e^{i\omega_{\vec{q}} t - i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right]$$
$$+ c^2 \sum_{j=1}^{3} \left[ ik_j\, \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\, a_{\vec{k},\lambda}\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} - ik_j\, \vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\, a^*_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$
$$\cdot \left[ iq_j\, \vec{e}_{\vec{q},\lambda'}\, a_{\vec{q},\lambda'}\, e^{-i\omega_{\vec{q}} t + i\vec{q}\cdot\vec{x}} - iq_j\, \vec{e}^{\,*}_{\vec{q},\lambda'}\, a^*_{\vec{q},\lambda'}\, e^{i\omega_{\vec{q}} t - i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right] \Big\}$$

Vier unterschiedliche $\vec{x}$-Integrale tauchen auf $(\omega_{-\vec{k}} \overset{!}{=} \omega_{\vec{k}})$:

$$\int_{\vec{x}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_{\vec{q}} t + i\vec{q}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{q})\, e^{-2i\omega_{\vec{k}} t}$$

$$\int_{\vec{x}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega_{\vec{q}} t - i\vec{q}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})$$

$$\int_{\vec{x}} e^{i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_{\vec{q}} t + i\vec{q}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})$$

$$\int_{\vec{x}} e^{i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega_{\vec{q}} t - i\vec{q}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{q})\, e^{2i\omega_{\vec{k}} t}$$

Folglich kann auch das $\vec{q}$-Integral durchgeführt werden:

$$H_{em} = \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_{\vec{k}}} \sum_{\lambda,\lambda'} \Big\{ \overbrace{\left[ -\omega_{\vec{k}}^2 + c^2 \sum_j k_j k_j \right]}^{0} \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{e}_{-\vec{k},\lambda'}\, a_{\vec{k},\lambda}\, a_{-\vec{k},\lambda'}\, e^{-2i\omega_{\vec{k}} t}$$
$$+ \left[ \omega_{\vec{k}}^2 + c^2 \sum_j k_j k_j \right] \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda'}\, a_{\vec{k},\lambda}\, a^*_{\vec{k},\lambda'}$$
$$+ \left[ \omega_{\vec{k}}^2 + c^2 \sum_j k_j k_j \right] \vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda'}\, a^*_{\vec{k},\lambda}\, a_{\vec{k},\lambda'}$$
$$+ \underbrace{\left[ -\omega_{\vec{k}}^2 + c^2 \sum_j k_j k_j \right]}_{0} \vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{e}^{\,*}_{-\vec{k},\lambda'}\, a^*_{\vec{k},\lambda}\, a^*_{-\vec{k},\lambda'}\, e^{2i\omega_{\vec{k}} t} \Big\}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \int d^3\vec{k} \sum_{\lambda,\lambda'} \omega_{\vec{k}} \left\{ \delta_{\lambda\lambda'}\, a_{\vec{k},\lambda}\, a^*_{\vec{k},\lambda'} + \delta_{\lambda\lambda'}\, a^*_{\vec{k},\lambda}\, a_{\vec{k},\lambda'} \right\}$$

$$= \int d^3\vec{k} \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \left\{ \frac{1}{2} a_{\vec{k},\lambda}\, a^*_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} a^*_{\vec{k},\lambda}\, a_{\vec{k},\lambda} \right\}.$$

**(iii) Quantisierung:**

$$a_{\vec{k},\lambda} \to \hat{a}_{\vec{k},\lambda} \quad ; \quad a^*_{\vec{k},\lambda} \to \hat{a}^+_{\vec{k},\lambda}$$

$$\left[ \hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{q},\lambda'} \right] = \left[ \hat{a}^+_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}^+_{\vec{q},\lambda'} \right] := 0 \;;$$

$$\left[ \hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}^+_{\vec{q},\lambda'} \right] := \begin{cases} \delta_{\vec{k}\vec{q}}\, \delta_{\lambda\lambda'}, & \vec{k} \text{ diskret } \left(\text{d.h. } \int d^3\vec{k} \to \sum_{\vec{k}}\right) \\ \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})\, \delta_{\lambda\lambda'}, & \vec{k} \text{ kontinuierlich} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}_{\vec{k},\lambda}\, \hat{a}^+_{\vec{k},\lambda} = \hat{a}^+_{\vec{k},\lambda}\, \hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \delta^{(3)}(\vec{0})$$

$$\boxed{\int_V \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{0}\cdot\vec{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \;!}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{H}_{em} = \int d^3\vec{k} \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \left\{ \hat{a}^+_{\vec{k},\lambda}\, \hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \right\}.$$

OK!

Energiedichte des Vakuums bzw. „kosmologische Konstante"

(iv) Feldoperatoren:

Aus Seite 87:

Dirac-Bild!

$$\hat{\vec{A}}_I(\vec{x},t) = \sqrt{\frac{4\pi c^2\hbar}{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_\lambda \left\{ \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\, \hat{a}_{\vec{k},\lambda}\, e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\, \hat{a}^+_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}.$$

Schrödinger-Bild erhält man durch $t \to 0$: $\hat{\vec{A}}(\vec{x}) = \hat{\vec{A}}_I(\vec{x},0)$.

Vertauschung:

Setze hier Vektorindizes oben, um das Schreiben zu erleichtern.

$$\left[\hat{A}^j(\vec{x}), \hat{A}^n(\vec{y})\right] = 4\pi c^2\hbar \int_{\vec{k}}\int_{\vec{q}} \sum_{\lambda,\lambda'} \Big\{ e^j_{\vec{k},\lambda}\, e^{n*}_{\vec{q},\lambda'} \left[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}^+_{\vec{q},\lambda'}\right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\vec{q}\cdot\vec{y}}$$
$$+ e^{j*}_{\vec{k},\lambda}\, e^n_{\vec{q},\lambda'} \left[\hat{a}^+_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{q},\lambda'}\right] e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\vec{q}\cdot\vec{y}} \Big\}$$
$$= 4\pi c^2\hbar \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\vec{k}}} \sum_\lambda \Big\{ e^j_{\vec{k},\lambda}\, e^{n*}_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} - e^{j*}_{\vec{k},\lambda}\, e^n_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{y}-\vec{x})} \Big\}$$

Es gilt: $\sum_\lambda e^j_{\vec{k},\lambda} e^{n*}_{\vec{k},\lambda} = \delta^{jn} - \frac{k^j k^n}{\vec{k}^2}$, d.h. unverändert in $j \leftrightarrow n$ sowie in $\vec{k} \to -\vec{k}$.

Aufgabe 11.2

Substituiere also $\vec{k} \to -\vec{k}$ im zweiten Term; die Terme kürzen sich, und wir erhalten $\left[\hat{A}^j(\vec{x}), \hat{A}^n(\vec{y})\right] = 0$.

Eine nichttriviale Vertauschung entsteht, wenn man eine „kanonische Koordinate" mit dem entsprechenden „kanonischen Impuls" vertauscht. Seite 86: $\pi^j = \frac{1}{4\pi c^2}\partial_t A^j$

$$\Rightarrow \hat{\vec{\pi}}_I(\vec{y},t) = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi c^2}} \int_{\vec{q}} \sum_{\lambda'} \left\{ -i\omega_{\vec{q}}\, \vec{e}_{\vec{q},\lambda'}\, \hat{a}_{\vec{q},\lambda'}\, e^{-i\omega_{\vec{q}}t + i\vec{q}\cdot\vec{y}} + i\omega_{\vec{q}}\, \vec{e}^{\,*}_{\vec{q},\lambda'}\, \hat{a}^+_{\vec{q},\lambda'}\, e^{i\omega_{\vec{q}}t - i\vec{q}\cdot\vec{y}} \right\}.$$

Vertauschung:

$$\left[\hat{A}^j(\vec{x}), \hat{\pi}^n(\vec{y})\right] = \hbar \int_{\vec{k}}\int_{\vec{q}} \sum_{\lambda,\lambda'} \Big\{ +i\omega_{\vec{q}}\, e^j_{\vec{k},\lambda}\, e^{n*}_{\vec{q},\lambda'} \left[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}^+_{\vec{q},\lambda'}\right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\vec{q}\cdot\vec{y}}$$
$$- i\omega_{\vec{q}}\, e^{j*}_{\vec{k},\lambda}\, e^n_{\vec{q},\lambda'} \left[\hat{a}^+_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{q},\lambda'}\right] e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\vec{q}\cdot\vec{y}} \Big\}$$
$$= i\hbar \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_\lambda \frac{1}{2} \Big\{ e^j_{\vec{k},\lambda}\, e^{n*}_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + e^{j*}_{\vec{k},\lambda}\, e^n_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{y}-\vec{x})} \Big\}$$

Substituiere $\vec{k} \to -\vec{k}$ im 2. Term

$$= i\hbar \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left(\delta^{jn} - \frac{k^j k^n}{\vec{k}^2}\right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$$

Notation $\frac{1}{\nabla^2}$ wie auf Seite 84

$$\stackrel{!}{=} i\hbar \left(\delta_{jn} - \frac{\partial_j\partial_n}{\nabla^2}\right) \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).$$

Fazit: in der Tat wie $[\hat{x}_j, \hat{p}_n] = i\hbar\,\delta_{jn}$, aber enthält eine transversale Projektion, wie es in der Coulomb-Eichung auch sein muss:

$$\partial^{\vec{x}}_j \left[\hat{A}^j(\vec{x}), \hat{\pi}^n(\vec{y})\right] = i\hbar \underbrace{\left(\partial_j\delta_{jn} - \frac{\nabla^2\partial_n}{\nabla^2}\right)}_{\partial_n - \partial_n} \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \stackrel{!}{=} 0.$$

— o —

## Physikalische Grössen:

Wie immer ist alles was man direkt mit $\vec{A}, \phi$ tut eichabhängig, auch die Vertauschungsrelationen. Physikalische Aussagen enthalten $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$. Wir erhalten, in der jetzigen „Eichung" $\nabla \cdot \vec{A} = |\nabla\phi| = 0$:

$$\hat{\vec{E}}_I(\vec{x},t) = -\frac{1}{c}\partial_t \hat{\vec{A}}_I(\vec{x},t) \overset{!}{=} -4\pi c\, \hat{\vec{\pi}}_I(\vec{x},t)$$

Seite 89

$$= \sqrt{4\pi\hbar} \int_{\vec{k}} \sum_{\lambda} i\omega_{\vec{k}} \left\{ \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\, \hat{a}_{\vec{k},\lambda}\, e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \text{H.c.} \right\},$$

„hermitesch konjugiert"

$$\hat{\vec{B}}_I(\vec{y},t) = \nabla \times \hat{\vec{A}}_I(\vec{y},t)$$

$$= \sqrt{4\pi c^2\hbar} \int_{\vec{q}} \sum_{\lambda'} i\vec{q} \times \left\{ \vec{e}_{\vec{q},\lambda'}\, \hat{a}_{\vec{q},\lambda'}\, e^{-i\omega_{\vec{q}}t + i\vec{q}\cdot\vec{y}} - \text{H.c.} \right\}.$$

Nichttriviale Vertauschungen entstehen wieder einmal nur aus den gemischten Termen. Aber die Ergebnisse lassen sich auch aus den Ausdrücken auf Seite 89 gewinnen, z.B.

(Keine kovariante Notation hier, d.h. Indizes oben = Indizes unten!)

$$\left[\hat{E}^j(\vec{x}), \hat{B}^n(\vec{y})\right] = -4\pi c \left[\hat{\pi}^j(\vec{x}), \varepsilon^{nkl}\partial^{\vec{y}}_k \hat{A}^l(\vec{y})\right]$$

$$= 4\pi c\, \varepsilon^{nkl}\partial^{\vec{y}}_k \left[\hat{A}^l(\vec{y}), \hat{\pi}^j(\vec{x})\right]$$

$$= 4\pi c\, \varepsilon^{nkl}\partial^{\vec{y}}_k\, i\hbar \left(\delta_{lj} - \frac{\partial_l\partial_j}{\nabla^2}\right)\delta^{(3)}(\vec{y}-\vec{x})$$

$$= 4\pi c\hbar i\, \underbrace{\varepsilon^{nkl}}_{\text{antisymmetrisch}} \left(\partial^{\vec{y}}_k \delta_{lj} - \underbrace{\frac{\partial_k\partial_l\partial_j}{\nabla^2}}_{\text{symmetrisch}}\right)\delta^{(3)}(\vec{y}-\vec{x})$$

$$= 4\pi c i\hbar\, \varepsilon^{nkj}\partial^{\vec{y}}_k \delta^{(3)}(\vec{y}-\vec{x})$$

$$= 4\pi c i\hbar\, \varepsilon^{jnk}\partial^{\vec{x}}_k \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).$$

Dieses Ergebnis ist „lokal", d.h. $\hat{\vec{E}}$ und $\hat{\vec{B}}$, die räumlich getrennt sind, vertauschen miteinander.

(Bei der eichabhängigen $\left[\hat{A}^j(\vec{x}), \hat{\pi}^n(\vec{y})\right]$ tauchte dagegen ein „nichtlokaler" Term auf (Seite 89):

$$„\frac{1}{\nabla^2}" f(\vec{x}) \overset{\text{Seite 84}}{:=} -\int d^3\vec{x}'\, \frac{f(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|};$$

$$„\frac{1}{\nabla^2}" \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \neq 0 \quad \text{bei } \vec{x} \neq \vec{y}.$$
)