6. Quantisierung des Feldes

6.1 Einleitung [Schwabl 14.1-3]

Grundidee: Das elektromagnetische Feld wurde bis jetzt als ein klassisches Feld betrachtet. Wir wollen es jetzt quantisieren. Die Quanten heissen dann Photonen. Um dies zu erreichen, starten wir von den Bewegungsgleichungen [idealerweise hergeleitet von einer Lagrange-Funktion, vgl. Mechanik II], bestimmen eine allgemeine Lösung, und mit deren Hilfe schreiben die Hamilton-Funktion in Form einer Menge von harmonischen Oszillatoren, welche wir quantisieren können.

Beispiel: Die Prozedur kann mit einem Klein-Gordon-Feld φ illustriert werden.

(i) Lagrange-Funktion:

$$L = \int_V d^3\vec{x}\, \mathcal{L}\,, \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{c^2}(\partial_t\varphi)^2 - |\nabla\varphi|^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^2\right\}.$$

(ii) Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \quad\Rightarrow\quad \left\{\partial^\mu\partial_\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right\}\varphi = 0\,.$$

(iii) Lösung $(V\to\infty)$:

$$\varphi(\vec{x},t) = \sqrt{\hbar c^2}\int\frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_{\vec{k}}}}\left\{a_{\vec{k}}\, e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{k}}^*\, e^{i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right\},$$

wobei $\omega_{\vec{k}} := \sqrt{k^2c^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2}$.

(iv) Hamilton-Funktion:

$$H = \int_V d^3\vec{x}\left\{\dot{\varphi}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \mathcal{L}\right\} = \int_V d^3\vec{x}\;\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{c^2}(\partial_t\varphi)^2 + |\nabla\varphi|^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^2\right\}.$$

(v) Nach Einsatz der Lösung:

$$H \overset{!}{=} \int d^3\vec{k}\;\hbar\omega_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}}^*\, a_{\vec{k}}$$ (Herleitung: wie auf Seite 88)

(vi) Quantisierung:

$$a_{\vec{k}} \to \hat{a}_{\vec{k}}\,, \quad a_{\vec{k}}^* \to \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger\,, \quad \text{mit } [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})\,.$$

Herausforderung: Die elektromagnetischen Felder werden mit Potentialen $(\phi,\vec{A})$ dargestellt, diese sind aber nicht direkt physikalisch, sondern können eichtransformiert werden (vgl. Seite 31). Wir müssen aufpassen, dass die Quantisierung mit der Eichinvarianz konform bleibt.

Eichwahl:

Im Kapitel 1.3 wurde ein <u>klassisches</u> Strahlungsfeld betrachtet, welches die Eichbedingungen $\nabla\cdot\vec{A} = 0$ (Coulomb) <u>sowie</u> $\phi = 0$ erfüllte:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{\lambda}\, \mathrm{Re}\left[\frac{1}{i|\vec{k}|} e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \quad ; \; \omega := c|\vec{k}|; \quad \vec{\lambda}\cdot\vec{k} = 0 .$$

Dass die beiden gleichzeitig gewählt werden können, ist aber nichttrivial, und muss begründet werden!

Maxwell-Gleichungen mit $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$, $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$:

* die homogenen sind automatisch erfüllt;
* die inhomogenen:

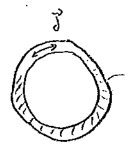
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho & \Leftrightarrow \quad -\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\partial_t(\nabla\cdot\vec{A}) = 4\pi\rho , \\ \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} & \Leftrightarrow \quad \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t(\nabla\phi) + \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} . \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) &= \vec{e}_i\, \varepsilon_{ijk}\partial_j \varepsilon_{klm}\partial_l A_m \\ &= \vec{e}_i\, (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\,\partial_j\partial_l A_m \\ &= \vec{e}_i\, \partial_i(\partial_m A_m) - \partial_j\partial_j(\vec{e}_m A_m) \end{aligned}}$$

Wenn wir die Coulomb-Eichung $\nabla\cdot\vec{A} = 0$ wählen, gilt also

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = -4\pi\rho & \text{(Poisson)} , \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\nabla\dot{\phi} . \end{cases}$$

<u>Falls</u> jetzt keine Ladungsdichte vorhanden ist, nur (zeitabhängige) quellenfreie Stromkreise $(\nabla\cdot\vec{j} = 0)$, müssen wir die Laplace-Gleichung $\nabla^2\phi = 0$ lösen. Bekannterweise gibt es aber in $\mathbb{R}^3$ keine überall regulären Lösungen ausser $\phi = \text{const}$ $\Rightarrow$ die Gleichungen



$$\begin{cases} \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \nabla\cdot\vec{A} = 0 \\ \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \end{cases}$$

liefern eine vollständige Beschreibung der Physik.

<u>Bemerkung</u>: Auch bei $\rho \neq 0$ kann ϕ unabhängig von $\vec{A}$ bestimmt werden:

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \phi(\vec{x},t) = \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad \text{(Elektrodynamik)}$$

$$\text{bzw.} \quad \phi(\vec{x},t) = \text{„}\frac{1}{\nabla^2}\text{“}\,(-4\pi\rho(\vec{x},t)) \quad \text{(vgl. Seite 16)}$$

Sinnvoll im Impulsraum

$$\Rightarrow \frac{1}{c}\nabla\dot{\phi} = -\frac{4\pi}{c}\cdot\nabla\,\text{„}\frac{1}{\nabla^2}\text{“}\,\partial_t\rho(\vec{x},t)$$

$$\overset{\partial_t\rho + \nabla\cdot\vec{j} = 0}{=} \frac{4\pi}{c}\cdot\nabla\,\text{„}\frac{1}{\nabla^2}\text{“}\,\nabla\cdot\vec{j}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)A_j = \frac{4\pi}{c}\underbrace{\left(\delta_{jk} - \frac{\partial_j\partial_k}{\nabla^2}\right)j_k}_{\text{„transversaler Teil“ der Stromdichte}} .$$

Klassische Hamilton-Funktion:

Laut Elektrodynamik kann die Energiedichte der elektromagnetischen Felder als

$$e_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$$

ausgedrückt werden. Die entsprechende Energie bzw. Hamilton-Funktion ist

$$
\begin{aligned}
H_{em} &= \frac{1}{8\pi}\int_V d^3\vec{x}\,\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \\
&= \frac{1}{8\pi}\int_V d^3\vec{x}\,\left\{\left(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\right)\cdot\left(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\right) + (\nabla\times\vec{A})\cdot(\nabla\times\vec{A})\right\} \\
&= \frac{1}{8\pi}\int_V d^3\vec{x}\,\left\{\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{A}\cdot\partial_t\vec{A} + \partial_j\vec{A}\cdot\partial_j\vec{A} + |\nabla\phi|^2 + \underbrace{\frac{2}{c}\partial_t\vec{A}\cdot\nabla\phi - \partial_j A_k\partial_k A_j}\right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla\times\vec{A})\cdot(\nabla\times\vec{A}) &= \varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k\,\varepsilon_{ilm}\,\partial_l A_m \\
&= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\,\partial_j A_k\partial_l A_m \\
&= \partial_j\vec{A}\cdot\partial_j\vec{A} - \partial_j A_k\partial_k A_j
\end{aligned}
$$

Mit periodischen bzw. verschwindenden Randbedingungen können partielle Integrationen durchgeführt werden; dadurch verschwinden die zwei letzten Terme:

$$\int_V d^3\vec{x}\,\partial_t A_j\,\vec{\partial}_j\phi = -\int_V d^3\vec{x}\,\partial_t \underbrace{A_j\overleftarrow{\partial}_j}_{\nabla\cdot\vec{A}}\phi \overset{\text{Coulomb}}{=} 0\,;$$

$$
\begin{aligned}
\int_V d^3\vec{x}\,\partial_j A_k\,\vec{\partial}_k A_j &= -\int_V d^3\vec{x}\,\partial_j A_k\overleftarrow{\partial}_k A_j \\
&= +\int_V d^3\vec{x}\,(\partial_k A_k)(\partial_j A_j) \overset{\text{Coulomb}}{=} 0\,.
\end{aligned}
$$

Mit $\phi \to \text{const.}$ verschwindet auch $|\nabla\phi|^2$.
Insgesamt erhalten wir in der „Strahlungseichung" $(\nabla\cdot\vec{A} = |\nabla\phi| = 0)$ also

$$H_{em} = \frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\,\left\{\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2c^2}\left[(\partial_t A_k)^2 + c^2|\nabla A_k|^2\right]\right\}_{\nabla\cdot\vec{A} = |\nabla\phi| = 0}.$$

Wechselwirkung mit Materie:

Alles bleibt beim Alten (Kapitel 1.3 bzw. 3.1):

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) + q\phi$$

(klassisches Teilchen, klassisches Feld)

bzw.

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{q}{2mc}\left[\hat{\vec{p}}, \vec{A}(\hat{\vec{x}},t)\right] - \frac{q}{mc}\vec{A}(\hat{\vec{x}},t)\cdot\hat{\vec{p}} + \frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}^2(\hat{\vec{x}},t) + q\phi(\hat{\vec{x}},t)$$

(quantisiertes Teilchen, klassisches Feld).

Klassische Lagrange-Funktion:

Laut Mechanik II:
$$L_{em} = -\frac{1}{16\pi}\int_V d^3\vec{x}\; F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad \left(F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right.$$
$$= -\frac{1}{16\pi}\int_V d^3\vec{x}\left\{-2F_{0j}F_{0j} + F_{jk}F_{jk}\right\}$$
$$= -\frac{1}{16\pi}\int_V d^3\vec{x}\left\{-2\left(\frac{1}{c}\dot{A}_j - \partial_j A_0\right)\left(\frac{1}{c}\dot{A}_j - \partial_j A_0\right)\right.$$
$$\left. + \partial_j A_k \partial_j A_k - 2\partial_j A_k \partial_k A_j + \underbrace{\partial_k A_j}_{j\,k}\underbrace{\partial_k A_j}_{j\,k}\right\}$$

Hier $A_0 = \phi$ und die gemischten Terme verschwinden wie auf Seite 85.

Falls auch $|\nabla\phi| \to 0$:
$$L_{em} = \frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\left\{\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2c^2}\left[(\partial_t A_k)^2 - c^2|\nabla A_k|^2\right]\right\}_{\nabla\cdot\vec{A} = |\nabla\phi| = 0.}$$

Check: Legendre-Transformation:

(i) identifiziere kanonische Koordinaten $\Rightarrow$ A_k (?).

(ii) bestimme kanonische Impulse : $\pi_k := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = \frac{1}{4\pi c^2}\partial_t A_k$.

(iii) transformiere: $H_{em} = \int_V d^3\vec{x}\sum_{k=1}^{3}\partial_t A_k\, \pi_k - L_{em}$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{1}{c^2}(\partial_t A_k)^2 - \frac{1}{2c^2}\left[(\partial_t A_k)^2 - c^2|\nabla A_k|^2\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{1}{2c^2}\left[(\partial_t A_k)^2 + c^2|\nabla A_k|^2\right]\right\}_{\nabla\cdot\vec{A} = |\nabla\phi| = 0.}$$

Es scheint zu funktionieren!

Wechselwirkung mit Materie:

Wie im Kapitel 1.3 (Seite 11):
$$L = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + \frac{q}{c}\,\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x},t) - q\phi(\vec{x},t).$$

Oder „kovariant", wie in Mechanik II:
$$\rho := q\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t))$$
$$\vec{j} := q\dot{\vec{x}}(t)\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t))$$
$$J^\mu := \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j}\end{pmatrix} \quad ; \quad A_\mu := \begin{pmatrix}\phi \\ -\vec{A}\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad L = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} - \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}\; J^\mu(\vec{x},t)\,A_\mu(\vec{x},t).$$