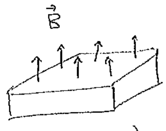
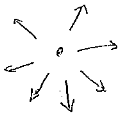
3.3 Diracs magnetischer Monopol [Sakurai 2.6]

Kapitel 3.1-2:  „technologisch wichtig" (homogen)

Jetzt:  $\vec{B}$? „theoretisch wichtig"

Hintergrund: Maxwell-Gleichungen im statischen Limes:

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\cdot\vec{j} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \end{cases}$$

Ohne Ladungen und Ströme wären die Gleichungen also invariant unter $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$; mit $\rho, \vec{j}$ gibt es eine „Asymmetrie" wegen Abwesenheit von magnetischen Ladungen.

Im Prinzip könnte es aber sein, dass es magnetische Ladungen („Monopole") gibt; die kommen aber so selten vor (Elementarteilchen mit sehr grosser Masse ??), dass bis heute keine experimentell gesehen worden sind.

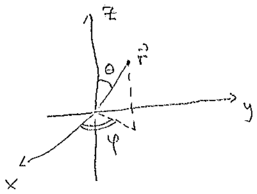
Ausgangspunkt: Was wenn eine magnetische Elementarladung existierte?

$$\vec{B} := q_M \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 4\pi q_M\, \delta^{(3)}(\vec{r})$$

$$\Phi_B = \int_{|\vec{r}|=R} r^2 d\Omega\, \vec{e}_r\cdot\vec{B} = 4\pi q_M R^2 \cdot \frac{1}{R^2} = 4\pi q_M .$$

Quantenmechanische Beschreibung: Wir benötigen wieder das entsprechende Vektorpotential, $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$. Benutze Kugelkoordinaten:



$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\, A_\varphi \end{vmatrix} .$$

Wie immer wird $\vec{A}$ nicht eindeutig sein; in einer Eichtransformation $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$ ist

$$\nabla\chi = \vec{e}_r \frac{\partial\chi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} .$$

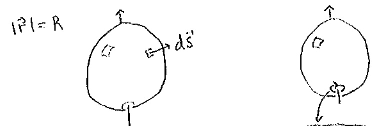
Erster Ansatz: $\vec{A} = \underbrace{q_M \frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}}_{A_\varphi} \vec{e}_\varphi$

Check 1: $\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & 0 & q_M(1-\cos\theta)\end{vmatrix} = \frac{q_M\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(1-\cos\theta)$

$= \frac{q_M\vec{e}_r}{r^2}$ ok!

Check 2: $\int_{|\vec{r}|=R} d\vec{S}\cdot\nabla\times\vec{A} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint d\vec{l}\cdot\vec{A}$

$= \lim_{\theta\to\pi^-}\int_0^{2\pi} \underbrace{r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\,d\varphi}_{d\vec{l}}\cdot q_M\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi$



Südpol weggeschnitten

Rand

$\overset{\cos\pi=-1}{=} 2\pi\cdot q_M\cdot 2 = 4\pi q_M$ ok!

Problem (?): $\vec{A}$ ist singulär beim $\theta=\pi$,
d.h. auf der negativen z-Achse.

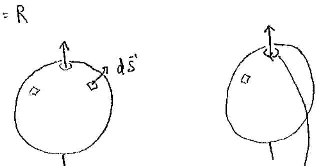
Zweiter Ansatz: $\vec{A}' = \underbrace{-q_M\frac{1+\cos\theta}{r\sin\theta}}_{A_\varphi}\vec{e}_\varphi$

Check 1: $\nabla\times\vec{A}' = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & 0 & q_M(-1-\cos\theta)\end{vmatrix} = \frac{q_M\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(-1-\cos\theta)$

$= \frac{q_M\vec{e}_r}{r^2}$ ok!

Check 2: $\int_{|\vec{r}|=R} d\vec{S}\cdot\nabla\times\vec{A}' \overset{\text{Stokes}}{=} \oint d\vec{l}\cdot\vec{A}' = \lim_{\theta\to 0^+}\int_0^{2\pi} \underbrace{-r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\,d\varphi}_{d\vec{l}}\cdot q_M\frac{-1-\cos\theta}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi$

$\overset{\cos 0=1}{=} 2\pi\cdot q_M\cdot 2 = 4\pi q_M$ ok!



Nordpol weggeschnitten

Rand

Problem (?): $\vec{A}'$ ist singulär beim $\theta=0$,
d.h. auf der positiven z-Achse.

Abdeckung des ganzen Raumwinkels:

Weil $\vec{A}$ und $\vec{A}'$ dasselbe $\vec{B}$ liefern, müssten sie Eichtransformationen voneinander sein.

$$\vec{A}' - \vec{A} = -\frac{2q_M}{r\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi \overset{?}{=} \nabla\chi$$

Seite 39 $\Rightarrow$ $\chi = -2q_M\varphi$!

(χ ist nicht kontinuierlich / differenzierbar auf der z-Achse, und auch nicht eindeutig: $\chi(\varphi=0^+) \neq \chi(\varphi=2\pi^-)$.)

Wir könnten also für $0 \leq \theta < \pi$ das Vektorpotential $\vec{A}$ benutzen; im Bereich $0 < \theta < \pi$ die Eichtransformation χ durchführen; und für $0 < \theta \leq \pi$ das Vektorpotential $\vec{A}'$ verwenden.

Wellenfunktion:

Wenn eine Eichtransformation $\vec{A} \to \vec{A}' = A + \nabla\chi$ durchgeführt wird, muss auch die Wellenfunktion transformiert werden (Seite 31):

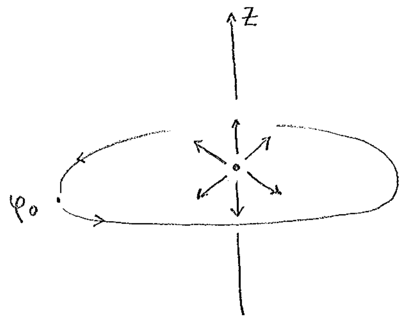
$$\psi \to \psi' = e^{\frac{iq\chi}{\hbar c}}\,\psi \,.$$

Jetzt also:

$$\psi'(r,\theta,\varphi) = e^{-\frac{2iqq_M\varphi}{\hbar c}}\,\psi(r,\theta,\varphi)\,.$$

Gedankenexperiment:

Betrachte Wellenfunktion auf einer Kurve um den Monopol. Gehe einmal entlang des Äquators ($\theta \approx \frac{\pi}{2}$) zum Ausgangspunkt zurück ($\varphi = \varphi_0 \to \varphi_0 + 2\pi$).



↪

Dabei müssen ψ und ψ' als Lösungen der Schrödinger-Gleichung eindeutig sein, d.h. in sich selbst übergehen:

$$\begin{cases} \psi(r,\theta,\varphi_0) = \psi(r,\theta,\varphi_0+2\pi) \\ \psi'(r,\theta,\varphi_0) = \psi'(r,\theta,\varphi_0+2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\frac{2iqq_M\varphi_0}{\hbar c}} = e^{-\frac{2iqq_M\varphi_0}{\hbar c}}\, e^{-\frac{4iqq_M\pi}{\hbar c}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4qq_M\pi}{\hbar c} = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2qq_M = \hbar c\, n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Folge 1: Der magnetische Fluss ist quantisiert, in Einheiten von $\Phi_0 = \frac{hc}{q}$:

$$\Phi_B = 4\pi q_M = \frac{2\pi\hbar c}{q}\, n = \frac{hc}{q}\cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(Seite 39) (vgl. Seite 34; Aufgaben 10.1-2)

Folge 2: „Dualität": q „klein" $\Rightarrow$ q_M „gross", und umgekehrt, weil qq_M fixiert.

Folge 3: Bestimme elektrische Ladung:

$$q = \frac{\hbar c}{2q_M}\cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ wenn es nur einen Monopol mit Ladung q_M gibt, müssen sämtliche geladenen Teilchen im Universum elektrische Ladungen haben, die Vielfachen von $\frac{\hbar c}{2q_M}$ sind!

[Kann das Argument richtig sein?? Soll $q = e\cdot n$ oder $q = \frac{e}{3}\cdot n$ oder noch etwas Anderes sein?]

— o —

Neben diesen spekulativen Betrachtungen spielt ähnliche Physik (insbesondere Quantisierung des magnetischen Flusses) eine wichtige Rolle auch bei ganz konkreten, experimentell realisierbaren Systemen, wie bei supraleitenden Wirbeln oder beim sogenannten Aharonov-Bohm-Effekt $\Rightarrow$ Übungsaufgaben.

— o — o —