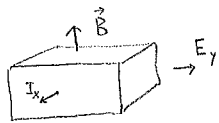


Elektrischer Widerstand:  $R_{yy} := \frac{V_y}{I_y}$  (Potentialdifferenz / Strom)

$$= \frac{L_y \cdot E_y}{L_x \cdot L_z \cdot j_y}$$
 (elektrisches Feld / Stromdichte)



Wenn aber ein Magnetfeld in z-Richtung eingeschaltet wird, gibt es einen Strom auch in die x-Richtung!

$$R_{yx} := \frac{V_y}{I_x} = \mathcal{O}(B_z)$$

Was ist die genaue Beziehung zwischen  $R_{yx}$  und  $B_z$ ?

Klassisch:

Lorentz-Kraft:  $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{v}{c} \times \vec{B})$

(Ausserdem fühlen die Ladungsträger auch eine Reibungskraft.)

Suche nach einer stationären Lösung, unter Vernachlässigung der Reibungskraft ( $T \approx 0$  K):

$$\vec{F} = q(E_y \vec{e}_y + \frac{v_x}{c} \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} B_z) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow E_y = \frac{v_x}{c} B_z$$

Strom =  $\frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} \times \text{Fläche} \times \text{Geschwindigkeit} = qn \cdot L_y L_z \cdot v_x$

$$\Leftrightarrow R_{yx} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{L_y E_y}{qn \cdot L_y L_z \cdot v_x} = \frac{1/2 E_y \cdot B_z}{qn \cdot L_z \cdot c E_y}$$

$$= \frac{B_z}{qn c L_z}$$

Wenn es insgesamt  $N$  Ladungsträger in unserer Probe gibt, dann ist  $n = \frac{N}{L_x L_y L_z}$ , und

$$n \cdot L_z = \frac{N}{L_x L_y} =: n_{\perp} =: \text{Flächendichte}$$

$$\Leftrightarrow R_{yx} = \frac{B_z}{q c n_{\perp}}$$

"klassischer Hall-Effekt"

Was wird beobachtet?

$$\frac{h}{e^2} = 25812,8076 \Omega$$

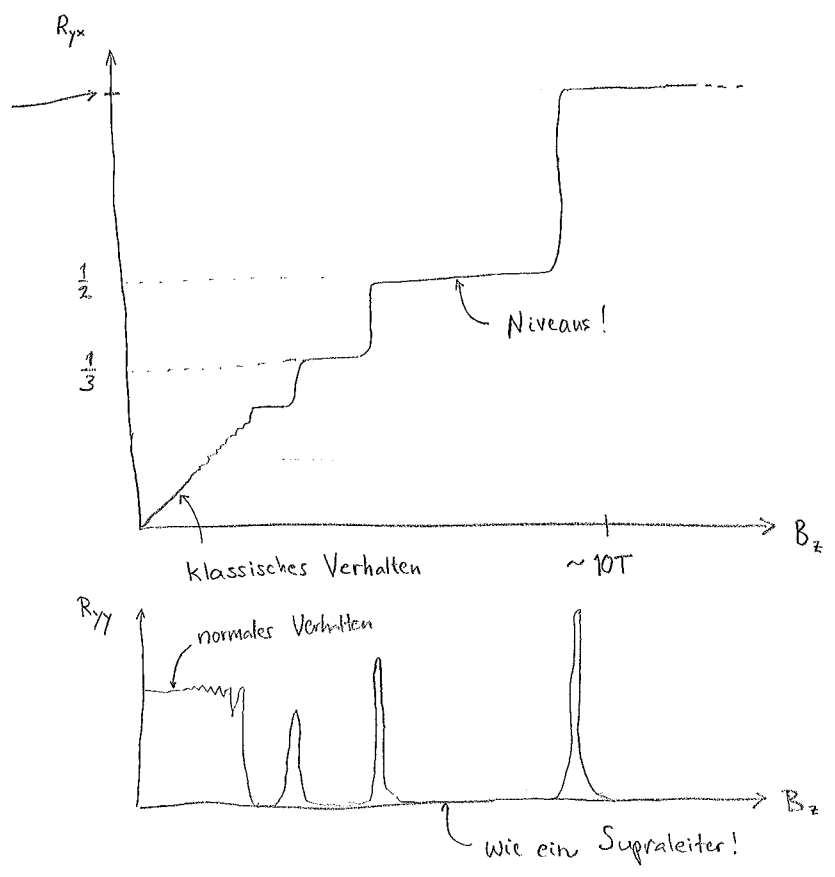
(=:  $R_K$  =: Klitzing-Konstante)

Auf Seite 34:

$$\frac{hc}{e} = 4,1357 \times 10^{-15} \text{ Tm}^2 ;$$

$$K_J := \frac{2e}{hc} = 483597,9 \times 10^9 \frac{1}{\text{Tm}^2}$$

=: Josephson-Konstante.



Quantenmechanisch:

Darstellung von  $\vec{B} = B_z \hat{e}_z$ ,  $\vec{E} = E_y \hat{e}_y$ :

$$\vec{A} = (-\gamma B_z, 0, 0), \quad \phi = -\gamma E_y$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left\{ \left( -i\hbar \partial_x + \frac{qB_z}{c} y \right)^2 - \hbar^2 \partial_y^2 - \hbar^2 \partial_z^2 \right\} - q\gamma E_y$$

Es gilt immer noch  $[\partial_x, \hat{H}] = [\partial_z, \hat{H}] = 0$ , so dass wir uns dem Ansatz

$$\Psi(x,y,z) = \tilde{\Psi}(y) e^{i(k_x x + k_z z)}$$

dienen können. Das „senkrechte“ Problem reduziert sich also auf eine eindimensionale Gleichung:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2 \partial_y^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left( \hbar k_x + \frac{qB_z}{c} y \right)^2 - q\gamma E_y \right\} \tilde{\Psi}(y) = \tilde{E} \tilde{\Psi}(y)$$

$$\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \hbar k_x \cdot \frac{qB_z}{mc} \cdot y + \frac{m}{2} \cdot \left( \frac{qB_z}{mc} \cdot y \right)^2 - qE_y \cdot y \quad (*)$$

$$=: \frac{m\omega_B^2}{2} (y + \gamma_0)^2 + \tilde{E}' \quad ; \quad \omega_B = \frac{qB_z}{mc}$$

$$= \frac{m\omega_B^2}{2} \gamma_0^2 + \tilde{E}' - m\omega_B^2 \gamma_0 \gamma + \frac{m}{2} (\omega_B \gamma)^2 \quad (**)$$

→

Vergleiche  $(x), (xx)$ : 
$$\begin{cases} \hbar k_x \omega_B - q E_y = -m \omega_B^2 y_0 \\ \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} = \frac{m \omega_B^2}{2} y_0^2 + \tilde{E}' \end{cases} \Rightarrow y_0 = -\frac{\hbar k_x}{m \omega_B} + \frac{q E_y}{m \omega_B^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{E}' = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} - \frac{m \omega_B^2}{2} \left( \frac{\hbar k_x}{m \omega_B} + \frac{q E_y}{m \omega_B^2} \right)^2$$

$$= \frac{\hbar k_x \cdot q E_y}{m \omega_B} - \frac{(q E_y)^2}{2 m \omega_B^2};$$

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} \cdot n_x, \quad n_x \in \mathbb{Z}$$

Wie auf Seite 34:  $0 < y_0 \leq L_y \Rightarrow$  Entartung  $N = \frac{B_z L_x L_y}{\Phi_0}$ ;  $\Phi_0 = \frac{hc}{q} =$  Flussquantum.  
 Aber Energie hängt jetzt von  $k_x$  ab  $\Rightarrow$  Entartung erhoben!

Genauer:

$$n_x := -n_{min} - n', \quad n' = 1, \dots, N'_{max}$$

$$\hbar k_x = -\frac{2\pi \hbar}{L_x} (n_{min} + n') =: \frac{q E_y}{\omega_B} - m \omega_B y_0'$$

$$y_0 = \underbrace{\frac{q E_y}{m \omega_B^2} - \frac{q E_y}{m \omega_B^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{2\pi \hbar c}{q B_z L_x} \cdot n'}_{y_0' \leq L_y}$$

$$\Rightarrow \tilde{E}' = + \frac{(q E_y)^2}{2 m \omega_B^2} - q E_y y_0'$$

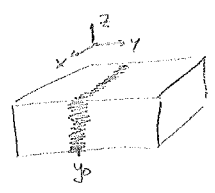
Spektrum: 
$$\tilde{E} = \hbar |\omega_B| \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{m}{2} \left(\frac{c E_y}{B_z}\right)^2 - \frac{\hbar c E_y}{B_z L_x} \cdot n'; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad n' = 1, \dots, \frac{B_z L_x L_y}{\Phi_0}$$

Stromdichte:

$$j_x = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left\{ \Psi^* \left( \partial_x - \frac{i q}{\hbar c} A_x \right) \Psi \right\}$$

$$= \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left\{ \tilde{\Psi}^*(y) \left( i k_x + i \frac{q B_z}{\hbar c} y \right) \tilde{\Psi}(y) \right\}$$

$$= |\tilde{\Psi}(y)|^2 \left\{ \frac{\hbar k_x}{m} + \omega_B y \right\}$$



Mittelwert:

$$\langle j_x \rangle = \frac{\hbar k_x}{m} + \omega_B y_0 = \frac{\hbar k_x}{m} - \frac{\hbar k_x}{m} + \frac{q E_y}{m \omega_B} = c \cdot \frac{E_y}{B_z}$$

Also genau wie die klassische Geschwindigkeit auf Seite 35!

Bemerkung: Es muss natürlich  $\frac{\langle v_x \rangle}{c} = \frac{E_y}{B_z} \ll 1$  gelten; andernfalls darf die Reibung nicht vernachlässigt werden!

Fazit:

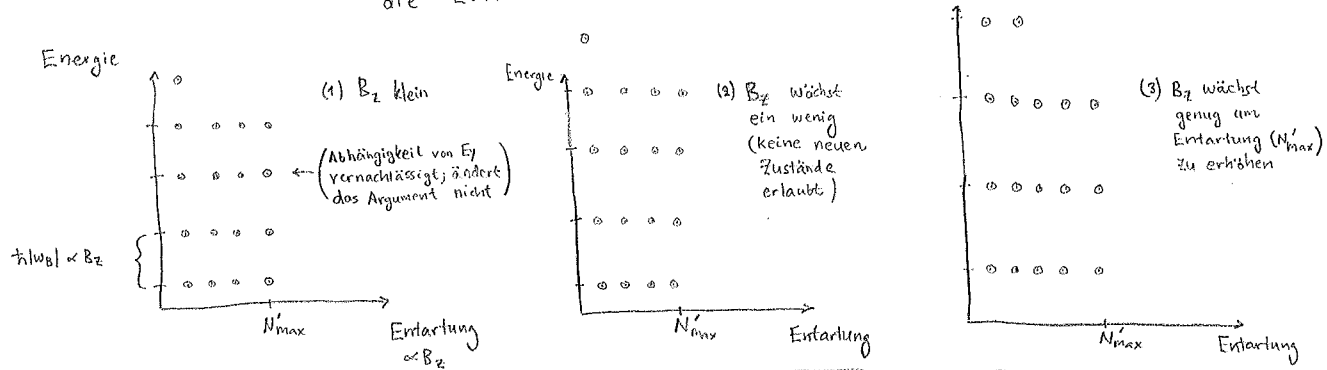
$$\tilde{E} = \hbar |\omega_B| \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} m \langle v_x \rangle^2 - \underbrace{\frac{\hbar \langle v_x \rangle}{L_x}}_{q E_y \cdot y_0'} \cdot n', \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$n' \in \left\{ 1, \dots, \frac{B_z L_x L_y}{\Phi_0} \right\}$$

Also was passiert?

Bis jetzt ging es um Einteilchenzustände.

In der Praxis haben wir  $N$  Elektronen und müssen die Einteilchenzustände bis zur Fermi-Fläche erfüllen.



$\nu = 4$  Niveaus voll  
 $\Rightarrow$   
 Wenige freien Streuzustände vorhanden  
 $\Rightarrow$   
 $R_{yy} \approx 0$

$\nu = 4$  Niveaus voll

während Umfüllung  
 "viel Bewegung"  
 $\Rightarrow$   
 Streuung mit wenig Energie möglich  $\Rightarrow R_{yy} \neq 0$ .

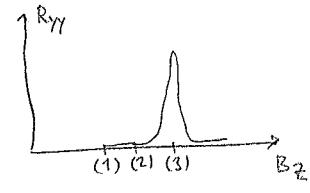
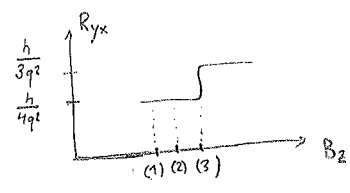
Zustandsdichte:  
 $n_{\perp} = \frac{\nu N'_{max}}{L_x L_y} = \nu \cdot \frac{B_z}{\Phi_0}$

Zustandsdichte:  
 $n_{\perp} = \nu \cdot \frac{B_z}{\Phi_0}$

Zustandsdichte:  
 $n_{\perp} = (3 \dots 4) \frac{B_z}{\Phi_0}$

$R_{yx} = \frac{B_z}{q c n_{\perp}} = \frac{\Phi_0}{\nu \cdot q c} = \frac{h}{\nu q^2} \quad ; \nu = 4$

$R_{yx} = \frac{h}{(3 \dots 4) q^2}$



Warnung: Diese Diskussion ist hoch idealisiert!

Bemerkung: Es wurden auch Niveaus mit Bruchzahlen gefunden ("gebroschenzahliger" bzw. "fraktionaler" Quanten-Hall-Effekt). Die Erklärung scheint viel schwieriger zu sein, und hat etwas mit Elektron-Elektron-Wechselwirkungen zu tun.  
 $\hookrightarrow$  Nobel-Preis 1998 [Laughlin, Strömer, Tsui].

\* ...