

2.4 Über die Streuphasen

[Sakurai 7.7-8]

Im Kapitel 2.3 wurde gezeigt, dass die Streuamplitude $f(\theta, k)$

$\langle \vec{x} | \vec{k} \rangle \propto e^{ikz} + f(\theta, k) \frac{e^{ikr}}{r} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ im Allgemeinen als „Partialwellenentwicklung“
ausgedrückt werden kann: $f(\theta, k) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) P_l(\cos \theta)$, (*)

Um von diesem Ergebnis profitieren zu können, müssen wir aber die $\delta_l(k)$ bestimmen, oder mindestens etwas über ihren allgemeinen Eigenschaften wissen.

Beispiel 1 Seiten 20-21: für $V(\vec{r}) = \frac{\alpha e^{-\mu r}}{r}$ ergibt die Bornsche Näherung

die Streuamplitude $\tilde{V}(\vec{k}_f - \vec{k}_i) = \frac{4\pi\alpha}{\mu^2 + 2k^2(1 - \cos\theta)}$

Seite 23: dies entspricht

$$f(\theta, k) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\vec{k}_f - \vec{k}_i) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2 [\mu^2 + 2k^2(1 - \cos\theta)]}$$

Bemerkung: $f(\theta, k) \in \mathbb{R}$

\Rightarrow die Bornsche Näherung kann nur für $|\delta_l(k)| \ll 1$ funktionieren [so dass $e^{i\delta_l \sin \delta_l} \approx \delta_l \in \mathbb{R}$ gilt].

Normierung: $\int_{-1}^{+1} dt P_l(t) P_{l'}(t) = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1}$
 $\Rightarrow \int_{-1}^{+1} dt P_l(t) f(\theta, k) \approx \frac{2\delta_l(k)}{k}$ (x) mit $|\delta_l| \ll 1$

* $l=0$, $P_0(t) = 1$ „s-Welle“

$$\begin{aligned} \delta_0(k) &= \frac{k}{2} \int_{-1}^{+1} dt \left\{ \frac{-2m\alpha}{\hbar^2 [\mu^2 + 2k^2(1-t)]} \right\} \\ &= -\frac{km\alpha}{\hbar^2} \int_{-1}^{+1} dt \left(-\frac{1}{2k} \right) \frac{d}{dt} \ln [\mu^2 + 2k^2(1-t)] \\ &= \frac{m\alpha}{2k\hbar^2} \ln \frac{\mu^2}{\mu^2 + 4k^2} \stackrel{k^2 \ll \mu^2}{\approx} -\frac{2m\alpha k}{\hbar^2 \mu^2} \end{aligned}$$

* $l=1$, $P_1(t) = t$ „p-Welle“

$$\begin{aligned} \delta_1(k) &= \frac{k}{2} \int_{-1}^{+1} dt \left\{ \frac{-2m\alpha t}{\hbar^2 [\mu^2 + 2k^2(1-t)]} \right\} \\ &= \frac{m\alpha}{2k\hbar^2} \int_{-1}^{+1} dt \left\{ \frac{2k^2(-t+1-1) + \mu^2 - \mu^2}{\mu^2 + 2k^2(1-t)} \right\} \\ &= \frac{m\alpha}{2k\hbar^2} \left\{ 2 + \frac{\mu^2 + 2k^2}{2k^2} \ln \frac{\mu^2}{\mu^2 + 4k^2} \right\} \stackrel{k^2 \ll \mu^2}{\approx} -\frac{4m\alpha k^3}{3\hbar^2 \mu^4} \end{aligned}$$

Fazit:

* Im Allgemeinen ist die Bornsche Näherung OK für $k^2 \gg \mu^2$, aber dann sind alle $\delta_l(k)$ derselben Ordnung, und es lohnt sich nicht, das Ergebnis noch zu entwickeln.

* Für $k^2 \ll \mu^2$ (kleine Energien) dagegen dominiert die s-Welle, und Partialwellenentwicklung ist nützlich.

Beispiel 2

Streuung an einer harten Kugel: $V(r) := \begin{cases} \infty, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$

Aufgabe 5.1 \Rightarrow die Bornsche Näherung funktioniert nicht.
 Dann muss die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung exakt gelöst werden!

$r \geq R$ Seite 24: $\Psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) P_l(\cos \theta)$, wobei
 $R_l(r) = a_l j_l(kr) + b_l n_l(kr)$.

$r \leq R$ $\Psi(r, \theta) \stackrel{!}{=} 0$

Um die zwei freien Koeffizienten (a_l, b_l) zu bestimmen, werden zwei Randbedingungen gebraucht:

- (i) Seite 25 \Rightarrow für $r \rightarrow \infty$ gilt

$$R_l(r) = \frac{2l+1}{2ikr} i^l \left\{ e^{2i\delta_l(k)} e^{i(kr - \frac{\pi l}{2})} - e^{-i(kr - \frac{\pi l}{2})} \right\}$$
- (ii) Für $r \rightarrow R$ gilt $R_l(R) = 0$ (Kontinuität).

Aus Büchern (z.B. Arfken Kap. 11.7):

$j_l(kr) \approx \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{\pi l}{2})$, $kr \gg 1$;
 $n_l(kr) \approx -\frac{1}{kr} \cos(kr - \frac{\pi l}{2})$, $kr \gg 1$.

$R_l = a_l j_l + b_l n_l \Rightarrow R_l(r) \approx \frac{1}{2kri} \left\{ (a_l - ib_l) e^{i(kr - \frac{\pi l}{2})} - (a_l + ib_l) e^{-i(kr - \frac{\pi l}{2})} \right\}$, $kr \gg 1$.

Vergleich mit Partialwellenentwicklung $\Rightarrow \begin{cases} a_l + ib_l = (2l+1) i^l e^{i\delta_l} & (a) \\ a_l - ib_l = (2l+1) i^l e^{2i\delta_l} & (b) \\ a_l j_l(kR) + b_l n_l(kR) = 0 & (c) \end{cases} \quad (i)$

(a) + (b) $\Rightarrow 2a_l = (2l+1) i^l e^{i\delta_l} (e^{i\delta_l} + e^{-i\delta_l})$
 (a) - (b) $\Rightarrow 2ib_l = (2l+1) i^l e^{i\delta_l} (e^{-i\delta_l} - e^{i\delta_l})$

dividiere $\Rightarrow \frac{a_l}{b_l} = -\frac{\cos \delta_l}{\sin \delta_l}$
 (c) $\Rightarrow \frac{a_l}{b_l} = -\frac{n_l(kR)}{j_l(kR)} \Rightarrow \tan \delta_l(k) = \frac{j_l(kR)}{n_l(kR)}$

Insbesondere: $\tan \delta_0(k) = -\frac{\sin(kR)}{\cos(kR)} \Rightarrow \delta_0(k) = -kR \pmod{\pi}$

$\Rightarrow \delta = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2(kR) + \sum_{l \geq 1} (\dots)$

Seite 26 $\Rightarrow \frac{4\pi R^2}{k^2}$ für $kr \ll 1$!

Weitere Eigenschaften der Lösung \Rightarrow Aufgabe 7, 2.

"Phänomenologie" der Streuphasen

Auch wenn keine exakte Lösung wie auf Seite 28 zur Verfügung steht, können über die $S_\ell(k)$ unterschiedliche allgemeine Aussagen gemacht werden.

- (i) Bei festem k und Potential mit Reichweite R tragen ^{normalerweise} nur l -Werte bis $l \sim kR$ wesentlich bei. (Ausnahme: Punkt (vi))

Begründung: Radialgleichung bei $r \geq R$: $\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) R_\ell = 0$ (Seite 24)

Der Teil $\frac{l(l+1)}{r^2}$ fungiert wie ein abstossendes Potential (\sim Zentrifugalkraft) und kann nur dann überwunden werden, wenn $k^2 \gg \frac{l(l+1)}{R^2}$ gilt, d.h. $l(l+1) \ll (kR)^2$.

- (ii) Insbesondere: bei sehr niedrigen Energien, $kR \ll 1$, kann nur die s -Welle ($l=0$) wichtig sein. Der Streuquerschnitt weist dann keine Winkelabhängigkeit auf ($P_0(\cos\theta) = 1$).

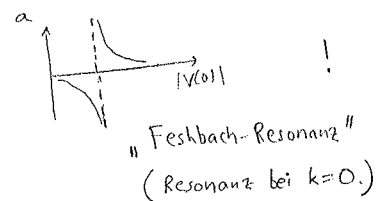
- (iii) $\mathcal{Z} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell(k)$ muss auch bei $kR \rightarrow 0$ endlich bleiben
 $\Rightarrow \delta_0(k) \sim kR \text{ mod } \pi$ für $kR \ll 1$.

[Bei harter Kugel: $\delta_0(k) = -kR \quad \forall kR!$]

- (iv) Definition: Streulänge $a := -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \delta_0(k)}{k}$ ($\Rightarrow \lim_{k \rightarrow 0} \mathcal{Z} = 4\pi a^2$).

Abstossendes Potential: $a \approx R$.

Anziehendes Potential: $a < 0$ oder



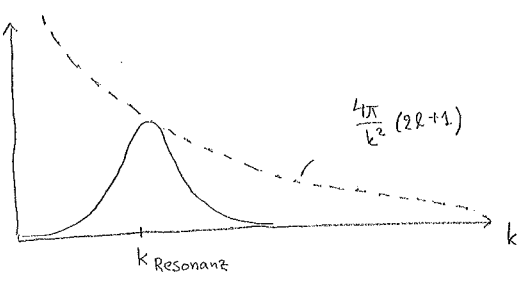
- (v) Bei besonderen Energien gilt $\delta_0(k) = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Die s -Welle trägt dann nicht bei ($\sin \delta_0(k) = 0$), und die höheren l 's sind wichtig.

(Dies ist sowohl beim anziehenden als auch beim abstossenden Potential möglich.)

(vi) Bei besonderer Energie kann eine überraschend hohe Welle ($l > 0$)

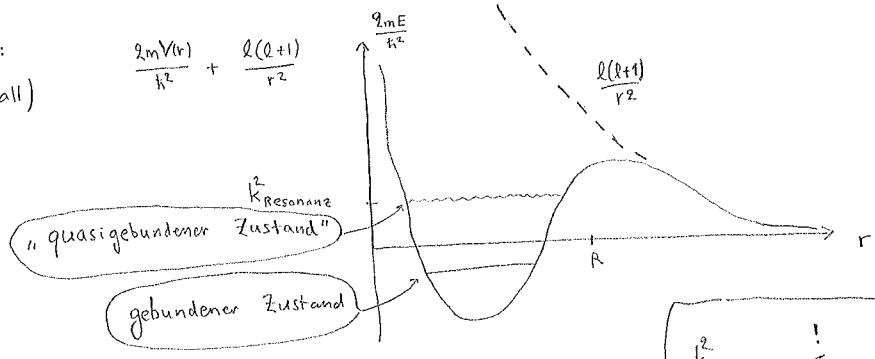
sogar dominieren: $\frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k)$



Es geht dann um eine Resonanz.

Physikalisch:
(anziehender Fall)

$$\frac{2mV(r)}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}$$

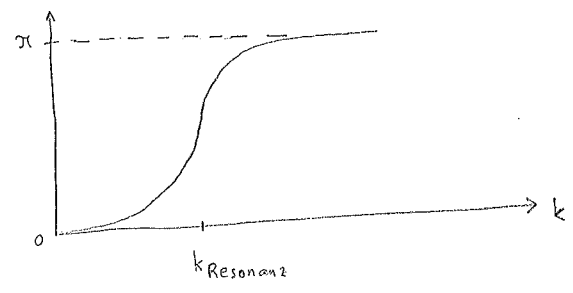


$$k_{\text{Resonanz}}^2 < \frac{l(l+1)}{R^2} \quad (\text{vgl. (i)})$$

Mathematisch:

$$\sin^2 \delta_l(k) \approx 1$$

$$\delta_l(k) = \frac{\pi}{2} \text{ mod } \pi$$



Amplitude (Seite 25):

$$e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) = \frac{\sin \delta_l(k)}{\cos \delta_l(k) - i \sin \delta_l(k)} = \frac{1}{\cot \delta_l(k) - i}$$

$$\cot \delta_l(k_{\text{Resonanz}}) = 0 \Rightarrow \cot \delta_l(k) = -\frac{\gamma}{\Gamma} (E - E_{\text{Resonanz}}) + \mathcal{O}(E - E_{\text{Resonanz}})^2$$

$$\Rightarrow e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) \approx \frac{-\frac{\Gamma}{2}}{E - E_{\text{Resonanz}} + i \frac{\Gamma}{2}}$$

$$\Rightarrow |e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k)|^2 \approx \frac{(\frac{\Gamma}{2})^2}{(E - E_{\text{Resonanz}})^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}$$

"Breit-Wigner-Resonanz"
(Resonanz als Funktion von E oder k)