

2.2 Die Bornsche Näherung und höhere Ordnungen [Saburai 7.2]

Seite 17 mit $\hat{V} = V(\hat{x})$ und „E+ ϵ “:

$$\langle \vec{x} | \vec{k}_i \rangle = \langle \vec{x} | \vec{k}_i \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{x} - \vec{x}'}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} V(\vec{x}') \langle \vec{x}' | \vec{k}_i \rangle \quad (\square)$$

Diese ist keine Lösung sondern eine „Integralgleichung“ für $\langle \vec{x} | \vec{k}_i \rangle$.
Wenn aber V „klein“ ist, ist eine „iterative“ Lösung möglich:

$$\langle \vec{x} | \vec{k}_i \rangle = \langle \vec{x} | \vec{k}_i \rangle^{(0)} + \langle \vec{x} | \vec{k}_i \rangle^{(1)} + \dots$$

Ordnung in V

Einsatz in (□) \Rightarrow $\begin{cases} \langle \vec{x} | \vec{k}_i \rangle^{(0)} = \langle \vec{x} | \vec{k}_i \rangle \\ \langle \vec{x} | \vec{k}_i \rangle^{(1)} = -\frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{x} - \vec{x}'}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} V(\vec{x}') \langle \vec{x}' | \vec{k}_i \rangle^{(0)} \end{cases}$ usw. ...

Benutze auch: Seite 10 $\Rightarrow \langle \vec{x} | \vec{k}_i \rangle^{(0)} = \frac{c}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{x}}$

Seite 18 $\Rightarrow \frac{e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{x} - \vec{x}'}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \stackrel{|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|}{\approx} \frac{e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{x}'}}{|\vec{x}|}$, $\vec{k}_f = k_f \vec{e}_x$

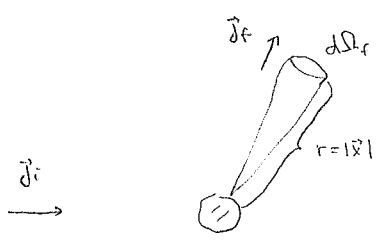
$$\hookrightarrow \langle \vec{x} | \vec{k}_i \rangle^{(0)} + \langle \vec{x} | \vec{k}_i \rangle^{(1)} \approx \frac{c}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{x}} - \frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{x}}}{4\pi|\vec{x}|} \cdot \underbrace{\int d^3x' e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \vec{x}'} V(\vec{x}')}_{=: \tilde{V}(\vec{k}_f - \vec{k}_i)} \right\}$$

(Fourier-Transformierte von V!)

Aus dieser Formel können wir direkt den Wirkungsquerschnitt entnehmen!

Seite 10 $\Rightarrow e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{x}}$ ergibt $|\vec{j}_i| = \frac{\hbar k_i}{m}$

Seite 18 $\Rightarrow \frac{e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{x}}}{r}$ ergibt $|\vec{j}_f| = \frac{\hbar k_f}{m} \cdot \frac{1}{r^2}$, $r = |\vec{x}|$.



$$\begin{aligned} d\sigma_{fi} &= \frac{\text{Ereignisrate } [\frac{1}{s}]}{\text{einlaufende Stromdichte } [\frac{1}{m^2 s}]} \\ &= \frac{\text{auslaufende Stromdichte } [\frac{1}{m^2 s}] \times \text{Oberflächenelement } [m^2]}{\text{einlaufende Stromdichte } [\frac{1}{m^2 s}]} \\ &= \frac{|\vec{j}_f| r^2 d\Omega_f}{|\vec{j}_i|} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_f} = \frac{m^2}{(2\pi)^2 \hbar^4} \cdot \frac{k_f}{k_i} \cdot |\tilde{V}(\vec{k}_f - \vec{k}_i)|^2}$$

„Bornsche Näherung“

Vergleich mit Fermis goldener Regel

Seite 10: $\frac{d\Omega_{fi}}{d\Omega_f} = \left(\frac{2\pi}{\hbar}\right)^4 \frac{m^2}{|c|^2} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{k_f}{k_i} \left| \langle \vec{k}_f^{(1)} | \hat{V} | \vec{k}_i^{(1)} \rangle \right|^2$

$$\langle \vec{k}_f^{(1)} | V(\vec{x}) | \vec{k}_i^{(1)} \rangle = \int d^3\vec{x}' V(\vec{x}') \underbrace{\frac{1}{L^{3/2}} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{x}'}}_{\langle \vec{k}_f^{(1)} | \vec{x}' \rangle} \underbrace{\frac{c}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{x}'}}_{\langle \vec{x}' | \vec{k}_i^{(1)} \rangle}$$

$$\mathbb{1} = \int d^3\vec{x}' |\vec{x}'\rangle \langle \vec{x}'|$$

$$= \frac{c}{(2\pi L)^{3/2}} \tilde{V}(\vec{k}_f - \vec{k}_i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\Omega_{fi}}{d\Omega_f} = \frac{m^2}{(2\pi)^2 \hbar^4} \cdot \frac{k_f}{k_i} \cdot |\tilde{V}(\vec{k}_f - \vec{k}_i)|^2 \quad \text{OK!}$$

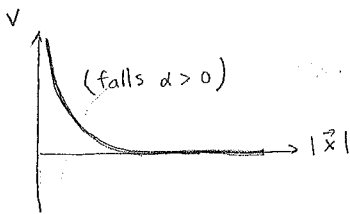
Wir erhalten also identische Ergebnisse aus sehr unterschiedlichen Berechnungen (zeitabhängig \Leftrightarrow zeitunabhängig; Würfelnormierung \Leftrightarrow unendliches Volumen; usw.)!

Beispiel

$$V(\vec{x}) := \frac{\alpha e^{-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}$$

"Yukawa-Potential"

(Modell für Kernkräfte falls $\alpha < 0$;
bei $|\vec{x}| \ll \mu^{-1}$ wie das Coulomb-Potential;
bei $|\vec{x}| \gg \mu^{-1}$ exponentiell klein;
Reichweite $\frac{1}{\mu} \approx \frac{\hbar}{m_\pi c} \approx 10^{-15} \text{ m}$)



\uparrow Pionenmasse

$$\tilde{V}(\vec{q}) = \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \frac{\alpha e^{-\mu r}}{r} \quad | \quad r = |\vec{x}|, \quad q = |\vec{q}|$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \int_0^\infty dr r^2 e^{-iqr \cos\theta} \frac{\alpha e^{-\mu r}}{r}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \cdot \frac{\alpha e^{-\mu r}}{r} \cdot \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr}$$

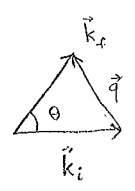
$$= \frac{2\pi\alpha}{iq} \int_0^\infty dr \left\{ e^{-(\mu-iq)r} - e^{-(\mu+iq)r} \right\}$$

$$= \frac{2\pi\alpha}{iq} \left[-\frac{e^{-(\mu-iq)r}}{\mu-iq} + \frac{e^{-(\mu+iq)r}}{\mu+iq} \right]_0^\infty = \frac{2\pi\alpha}{iq} \left[\frac{1}{\mu-iq} - \frac{1}{\mu+iq} \right]$$

$$= \frac{2\pi\alpha}{iq} \left[\frac{\mu+iq}{\mu^2+q^2} - \frac{\mu-iq}{\mu^2+q^2} \right] = \frac{4\pi\alpha}{\mu^2+q^2}$$

Das Ergebnis hängt also nur vom $|\vec{q}|$ ab, nicht von der Richtung von \vec{q} ; der Grund liegt daran, dass $V(\vec{x})$ nur vom $|\vec{x}|$ abhängig war ("keine bevorzugte Richtung").

"Kinematik" :



$\Theta =$ Streuwinkel
 $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i =$ "Impulsübertrag"

$$|\vec{q}|^2 = (\vec{k}_f - \vec{k}_i)^2 = k_f^2 + k_i^2 - 2\vec{k}_f \cdot \vec{k}_i = 2k^2(1 - \cos\theta) = 4k^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

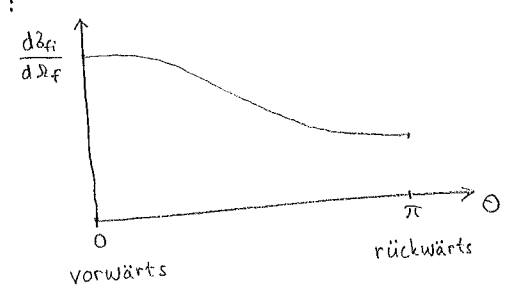
Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\Omega_{fi}}{d\Omega_f} = \frac{m^2}{(2\pi)^2 \hbar^4} \cdot |\tilde{V}(\vec{q})|^2 = \left(\frac{4\pi\alpha m}{2\pi \hbar^2}\right)^2 \frac{1}{(\mu^2 + q^2)^2}$$

$$= \left(\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\mu^2 + 4k^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}$$

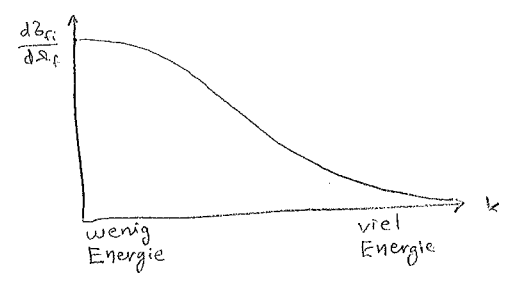
Bemerkungen:

* Abhängigkeit vom θ :



\Rightarrow Auch Prozesse wie \rightleftharpoons sind möglich!

* Abhängigkeit vom k :



\Rightarrow Schnelle Teilchen erfahren wenig Streuung!

* Limes $\mu \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow Ze^2$, $\hbar^2 k^2 \rightarrow p^2$:

$$\frac{d\Omega_{fi}}{d\Omega_f} = \left(\frac{mZe^2}{p^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4 \sin^4(\theta/2)}$$

Dies ist die klassische Rutherford-Formel für Streuung am Coulomb-Potential. Allerdings ist

$$\Omega_{fi} = 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \frac{d\Omega_{fi}}{d\Omega_f} \propto \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \cdot \frac{1}{(1 - \cos\theta)^2} = \infty$$

\Rightarrow kann das Potential wirklich als "Störung" behandelt werden?

* Im Allgemeinen ist die Bornsche Näherung wie der erste Term einer Taylor-Reihe, d.h. ergibt eine präzise Antwort nur in einem bestimmten Limes. Im Prinzip kann die Genauigkeit der Vorhersage aber durch die Berechnung von Korrekturen höherer Ordnungen verbessert werden.

Höhere Ordnungen[†]

Seite 9 bzw. 15 : gebraucht wird $|\langle f_I | \hat{V} | \tilde{l}_I \rangle|$ wobei $|\tilde{l}_I \rangle$ die Lippmann-Schwinger-Gleichung erfüllt:

$$|\tilde{l}_I \rangle = |l_I \rangle + \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0^+} \hat{V} |\tilde{l}_I \rangle. \quad (*)$$

Wir definieren einen Operator \hat{T} ("T-Matrix", "Transfermatrix") durch

$$\hat{T} |l_I \rangle := \hat{V} |\tilde{l}_I \rangle \quad \forall |l_I \rangle.$$

Es folgt: (i) $|\langle f_I | \hat{V} | \tilde{l}_I \rangle| = |\langle f_I | \hat{T} | l_I \rangle|$!

Unser Ausgangspunkt war $\langle f_I | \hat{U}_I(+\infty, -\infty) | l_I \rangle$, mit $\langle f_I | l_I \rangle = 0$.

Eine formale Definition könnte also lauten:

$$\hat{U}_I(+\infty, -\infty) =: \hat{S} =: \hat{\mathbb{1}} - i \hat{T}. \quad (**)$$

die Streumatrix \hat{S} für $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ ergibt $\hat{S} = \hat{\mathbb{1}} - i \hat{T}$ "Streumatrix"

(ii) Operiere auf (*) mit \hat{V} :

$$\hat{V} |\tilde{l}_I \rangle = \hat{V} |l_I \rangle + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0^+} \hat{V} |\tilde{l}_I \rangle$$

$$\Leftrightarrow \hat{T} |l_I \rangle = \left(\hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0^+} \hat{T} \right) |l_I \rangle.$$

Dies gilt für alle $|l_I \rangle \Rightarrow$ Operatorgleichung

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0^+} \hat{T}. \quad (***)$$

Iterative Lösung:

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0^+} \left(\hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0^+} \left(\hat{V} + \dots \right) \right) \\ &= \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0^+} \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0^+} \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0^+} \hat{V} + \dots \end{aligned}$$

In Ortsdarstellung:
(für $\hat{V} = V(\vec{x})$)

$$\begin{aligned} \hat{T} |k_i \rangle &= \int d^3 \vec{x} \hat{T} | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | k_i \rangle \\ &= \int d^3 \vec{x} \left\{ | \vec{x} \rangle + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0^+} | \vec{x} \rangle + \dots \right\} V(\vec{x}) \langle \vec{x} | k_i \rangle \\ &= \int d^3 \vec{x} \left\{ | \vec{x} \rangle V(\vec{x}) + \int d^3 \vec{x}' | \vec{x} \rangle V(\vec{x}') \frac{im}{\hbar^2} G(\vec{x}; \vec{x}') V(\vec{x}') + \dots \right\} \langle \vec{x} | k_i \rangle \end{aligned}$$

Graphische Darstellung:



"eine Streuung"

"Zwei Streuungen",
dazwischen eine
Greensche Funktion bzw.
ein "Propagator".

[†] Man könnte auf Seite 19 einfach $\langle \vec{x} | k_i \rangle$ usw bestimmen, aber hier wird ein "allgemeiner" Vorgang geschildert.