Quantentheorie II **Übungsblatt Nr. 12**

Aufgabe 1: Drei Elektronen im Atom besetzen die untersten Niveaus:

$$|\Psi\rangle = \hat{A}\,|1s\uparrow\rangle_1\,|1s\downarrow\rangle_2\,|2p\,m\uparrow\rangle_3\ ,$$

wobei $\hat{A}$ einen Antisymmetrisierungsoperator bezeichnet. Zeigen Sie, dass dies Eigenzustand zum Gesamtbahndrehimpuls $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{L}}_1 + \hat{\vec{L}}_2 + \hat{\vec{L}}_3$ ist, d.h.

$$\hat{\vec{L}}^2\,|\Psi\rangle = 2\hbar^2\,|\Psi\rangle\ , \quad \hat{L}_z\,|\Psi\rangle = m\hbar\,|\Psi\rangle\ .$$

Aufgabe 2: Die Einteilchenwellenfunktionen in einem unendlich tiefen Kastenpotential haben die Form

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ , \quad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2mL^2}\ .$$

Betrachtet wird ein System bestehend aus zwei nichtwechselwirkenden Teilchen. Was ist die Energie und die Wellenfunktion des Grundzustandes, wenn die Teilchen

(a) unterscheidbar sind?

(b) identische Bosonen sind?

(c) identische Fermionen sind?

Aufgabe 3: Zwei nicht wechselwirkende Teilchen, jeweils mit der Masse m, befinden sich im eindimensionalen harmonischen Oszillatorpotential. Eines befindet sich im Grundzustand, das andere im ersten angeregten Zustand. Bestimmen Sie

$$\langle(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2\rangle$$

für die drei Fälle aus Aufgabe 2.

In der Prüfung sind keine Hilfsmittel erlaubt, aber die folgende Tabelle wird auf dem Prüfungsblatt gegeben:

$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$	$[\hat{J}_k\,,\hat{J}_l] = i\hbar\epsilon_{klm}\hat{J}_m$	$\hat{J}_\pm\|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\|j,m\pm 1\rangle$
$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)$	$\sigma_k\sigma_l = \delta_{kl}\mathbb{1}+i\epsilon_{klm}\sigma_m$	$\langle\vec{r}\|\hat{\vec{p}}^2\|\vec{r}'\rangle = \left\{-\hbar^2\left(\partial_r^2+\frac{2}{r}\partial_r\right)+\frac{\hat{\vec{L}}^2}{r^2}\right\}\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$
$[\hat{a}\,,\hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}$	$\hat{U}(R) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\alpha\vec{n}\cdot\hat{\vec{J}}\right)$	$Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \langle\theta,\varphi\|\ell,m\rangle$
$\hat{a}\|n\rangle = \sqrt{n}\|n-1\rangle$	$\hat{\vec{J}}^2\|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)\|j,m\rangle$	$E_n^{(1)} = \langle\varphi_n\|\hat{V}\|\varphi_n\rangle$
$\hat{a}^\dagger\|n\rangle = \sqrt{n+1}\|n+1\rangle$	$\hat{J}_3\|j,m\rangle = \hbar m\|j,m\rangle$	$[\hat{H}\,,\hat{P}_{ij}] = \hat{0}\,,\ \hat{P}_{ij}^2 = \hat{\mathbb{1}} \Rightarrow \lambda = \pm 1$