Quantentheorie II	**Übungsblatt Nr. 5**

Aufgabe 1: Betrachten Sie $\hat{\vec{L}} = -i\hbar\vec{r}\times\nabla$ in der Ortsdarstellung mit Kugelkoordinaten: $\vec{r} = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

(a) Leiten Sie die folgenden Darstellungen der kartesischen Komponenten des Bahndrehimpulses her:

$$\begin{aligned}
\hat{L}_x = \hat{L}_1 &= -i\hbar\left[-\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] , \\
\hat{L}_y = \hat{L}_2 &= -i\hbar\left[+\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] , \\
\hat{L}_z = \hat{L}_3 &= -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] .
\end{aligned}$$

(b) Verifizieren Sie (in Kugelkoordinaten) die Gültigkeit der Lie-Algebra-Beziehung

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\,\hat{L}_z \;.$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die Operatoren $\hat{L}_3$ und $\hat{p}_3$ miteinander vertauschen und bestimmen Sie die Funktionen, die sowohl zu $\hat{L}_3$ als auch zu $\hat{p}_3$ Eigenfunktionen sind.