Quantentheorie II **Übungsblatt Nr. 3**

Aufgabe 1: Betrachten Sie Drehungen um die Achse $\vec{n}$ mit dem Drehwinkel α: $\vec{r}\,' = R(\vec{n},\alpha)\,\vec{r}$. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) $R(\vec{n},\alpha)\,\vec{r} = \cos(\alpha)\,\vec{r} + [1-\cos(\alpha)]\,(\vec{n}\cdot\vec{r}\,)\,\vec{n} + \sin(\alpha)\,\vec{n}\times\vec{r}\,.$

(b) $R(\vec{n},0) = \mathbb{1}_{3\times 3}$ (Einselement).

(c) $R(\vec{n},-\alpha)\,R(\vec{n},\alpha) = \mathbb{1}_{3\times 3}$ (Inverse).

Aufgabe 2: Für infinitesimale Drehungen ($|\alpha| \ll 1$) gilt $R(\vec{n},\alpha) \approx \mathbb{1} - i\alpha\,\vec{n}\cdot\vec{\Sigma}$, mit

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} , \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Verifizieren Sie die Richtigkeit von $[\Sigma_j, \Sigma_k] = i\epsilon_{jkm}\Sigma_m$ (mit Einstein-Konvention).

(b) Sei $\vec{n} := (0,0,1)$. Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Winkel α die Gleichung $\exp(-i\alpha\,\vec{n}\cdot\vec{\Sigma}) = R(\vec{n},\alpha)$ gilt, wobei $R(\vec{n},\alpha)$ die Matrix aus Aufgabe 1 ist.