Quantentheorie II **Übungsblatt Nr. 1**

Aufgabe 1: Betrachten Sie den harmonischen Oszillator, mit

$$\hat{H} := \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}\,, \quad \hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat{p}\,, \quad \hat{a}^\dagger := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat{p}\,.$$

Seien $|n\rangle$ die normierten Eigenzustände von $\hat{H}$, mit $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ gilt, und dass deshalb der Wert $n = 0$ dem Grundzustand entspricht (dieser muss die definierende Gleichung $\hat{a}\,|0\rangle = 0$ erfüllen).

Ermitteln Sie, für den Zustand $|n\rangle$, die folgenden Erwartungswerte:

(b) $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$,

(c) $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}^2\rangle$,

(d) $\Delta x\,\Delta p\,.$

Aufgabe 2: Die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren des harmonischen Oszillators genügen $[\hat{a},\hat{a}] = [\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger] = 0$ sowie $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$. Betrachten Sie nun die Algebra $\{\hat{b},\hat{b}\} = \{\hat{b}^\dagger,\hat{b}^\dagger\} = 0$, $\{\hat{b},\hat{b}^\dagger\} = 1$, wobei $\{\hat{x},\hat{y}\} := \hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x}$, und sei $\hat{Q} := \hat{b}^\dagger\hat{b}$.

(a) Was für ein Spektrum und welche Eigenzustände besitzt $\hat{Q}$?

(b) Können Sie eine physikalische Interpretation für dieses Ergebnis vorschlagen?