9. Ausblick / Erweiterungen

A. Innerhalb der nichtrelativistischen Quantenmechanik

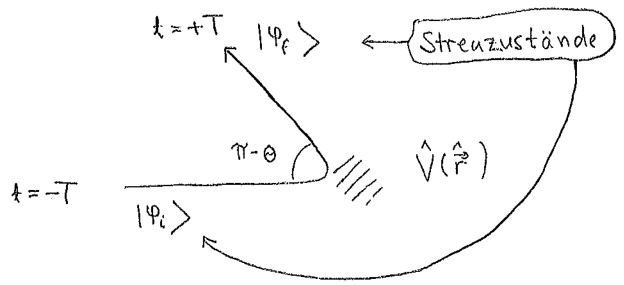
[Quantentheorie III]

(i) Zeitabhängige Störungstheorie

Die ungestörten Zustände $|\varphi_n\rangle$ und der Hamilton-Operator $\hat{H}_0$ sind wie früher, aber die Frage lautet jetzt: mit welcher Wahrscheinlichkeit verursacht $\hat{V}$ einen Übergang vom Zustand $|\varphi_i\rangle$ in den Zustand $|\varphi_f\rangle$? Die Amplitude:

$$C_{fi} = \langle \varphi_f(t=T)|\varphi_i(t=-T)\rangle = \delta_{fi} - \frac{i}{\hbar}\int_{-T}^{T} dt \, \langle \varphi_f | g\hat{V}(t)|\varphi_i\rangle \, e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} + \mathcal{O}(g^2).$$

(ii) Streutheorie



Rutherford-Formel:

$$|C_{fi}|^2 \longrightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{Ze^2}{4E\sin^2(\theta/2)}\right]^2$$

„Streuquerschnitt"

(iii) Wechselwirkung mit Strahlung bzw. mit elektromagnetischen Feldern

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \Phi = \text{Skalarpotential}$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \qquad\qquad \vec{A} = \text{Vektorpotential}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}(\hat{\vec{r}},t)\right]^2 + e\Phi(\hat{\vec{r}},t)$$

wie früher

neue Effekte!

B. Verallgemeinerungen der nichtrelativistischen Quantenmechanik

Die „abstrakte" Form der Schrödinger-Gleichung, $i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$, bleibt unverändert, aber $\hat{H}$ kann ganz anders aussehen.

(i) ein Teilchen aber relativistisch [Theoretische Übungen]

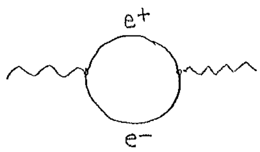
Eine relativistische Gleichung muss Lorentz-kovariant sein. Die linke Seite ist linear in $\frac{d}{dt}$ $\Rightarrow$ die rechte Seite muss linear in ∇ bzw. $\hat{\vec{p}}$ sein! Dirac $\Rightarrow$ $\hat{H}$ muss unbedingt eine Matrix sein! $\hat{H} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \hat{p}_i + \beta m$; α_i, β = Matrizen.

D.h., in der nichtrelativistischen Theorie gibt es eine Möglichkeit für Spin; in der relativistischen Version ist Spin eine Notwendigkeit.

(ii) sehr viele Teilchen / unbestimmte Anzahl von Teilchen

* In der statistischen Physik gibt es häufig sehr viele Teilchen ($N \sim 10^{23}$). Ausserdem ist in manchen Ensemblen die Teilchenzahl überhaupt keine angemessene Variable, sondern man benutzt das chemische Potential μ.

* Unter relativistischen Umständen kann die Teilchenzahl auch nicht im Voraus fixiert werden:



„virtuelles Paar"

Solche systeme werden mit Quantenfeldtheorie beschreiben:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m} \hat{\vec{p}}_i^{\,2} + \ldots \quad \Rightarrow \quad \int d^3\vec{r} \left\{ \frac{1}{2m} \left[\partial_i \hat{\phi}(\vec{r},t)\right]^2 + \ldots \right\}.$$

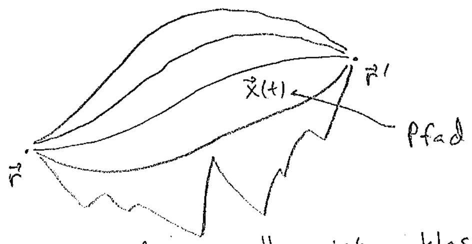
G. Pfadintegralformalismus   [Mechanik II (leider nicht immer)]

Wie in der klassischen Mechanik gibt es auch in der Quantenmechanik mehrere mögliche „Bilder":

klassisch			quantenmechanisch
Newton:	$\dot{p} = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$	$\Leftrightarrow$	„Ehrenfest": $m\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{x}\rangle = -\langle V'(\hat{x})\rangle$
Hamilton:	$H(p,x)$, $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$	$\Leftrightarrow$	„kanonisch": $i\hbar\frac{d}{dt}\lvert\psi\rangle = \hat{H}\lvert\psi\rangle$
Lagrange:	$L(\dot{x},x)$, $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$	$\Leftrightarrow$	„Pfadintegrale" [Feynman 1948]

Grundformel:

$$\langle \vec{r}\,' \,|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)} \,|\, \vec{r}\rangle = \int_{\vec{x}(t)=\vec{r}}^{\vec{x}(t')=\vec{r}\,'} \mathcal{D}\vec{x}(t)\, e^{\frac{i}{\hbar}\overbrace{\int_t^{t'} dt''\, L(\dot{x},x)}^{\text{„Wirkung"}}}$$



alles ist „klassisch" (keine Operatoren!), aber man muss über alle möglichen Bahnen summieren!

Formell geht es einfach um eine Umformulierung, aber die neue Methode ist sehr elegant und „intuitiv", und erlaubt auch die Lösung von einigen Problemen, die den kanonischen Methoden sehr schwierig sind.

D. Anwendungsbereiche

* Atom- und Molekülphysik

Massenskala : $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$

Energieskala : $E \sim \frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 \approx 13{,}6 \text{ eV}$

Längenskala : $a_0 \sim \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\hbar c}{m_e c^2} \approx 0{,}5 \times 10^{-10} \text{ m}$

* Kernphysik

Massenskala : $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$

Es gibt jetzt keine kleine Feinstrukturkonstante wie α!

Längenskala $\gg$ Proton-Radius $\sim \frac{\hbar c}{m_p c^2} \approx 0.2 \times 10^{-15} \text{ m}$

Energieskala $\sim (m_n - m_p) c^2 \approx 1.3 \text{ MeV}$

* Elementarteilchenphysik

Längenskala $\ll$ Proton-Radius

Energieskala $\geq m_p c^2 \sim 1 \text{ GeV}$

* Usw. usw.

——— o ———