5.5 Addition von Drehimpulsen

[Fliessbach 38 ; Griffiths 4.4]

Es gibt viele Systeme, bei denen gleichzeitig zwei (oder mehrere) unabhängige Drehimpulse auftauchen. Zum Beispiel:

* Bahndrehimpuls $\hat{\vec{L}}$ und Spin $\hat{\vec{S}}$; $\hat{\vec{J}} := \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ (vgl. Seite 73).
* Zwei Teilchen mit jeweils $\hat{\vec{J}}^{(1)}$ und $\hat{\vec{J}}^{(2)}$; $\hat{\vec{J}} := \hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)}$.

Im Folgenden benutzen wir die letztere Notation.

Es gibt zwei Möglichkeiten für die Wahl vertauschender Observablen (falls die Form des Hamilton-Operators dieses erlaubt; vgl. Seite 76):

(1) $\hat{\vec{J}}^{2(1)}, \hat{J}_3^{(1)}, \hat{\vec{J}}^{2(2)}, \hat{J}_3^{(2)}$ (weil gilt: $[\hat{J}_k^{(1)}, \hat{J}_\ell^{(2)}] = \hat{0}$)

Eigenzustände: $|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle := |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$
$:= |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$

(2) $\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_3, \hat{\vec{J}}^{2(1)}, \hat{\vec{J}}^{2(2)}$ (weil gilt: $[\hat{J}_k, \hat{\vec{J}}^{2(1)}] = [\hat{J}_k, \hat{\vec{J}}^{2(2)}] = 0$)*

Eigenzustände: $|JM\rangle$, mit

$$\hat{\vec{J}}^2 |JM\rangle = \hbar^2 J(J+1)|JM\rangle ,$$
$$\hat{J}_3 |JM\rangle = \hbar M |JM\rangle .$$

<u>Basiswechsel:</u> $$|JM\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1; j_2 m_2 | JM\rangle .$$

Die Übergangsamplituden $\langle j_1 m_1; j_2 m_2 | JM\rangle$ werden die „<u>Clebsch - Gordan - Koeffizienten</u>" genannt.
Unsere Aufgabe ist jetzt diese zu bestimmen.

---

* Beweis: $$[\hat{J}_k, \hat{\vec{J}}^{2(1)}] = \underbrace{[\hat{J}_k^{(1)}, \hat{\vec{J}}^{2(1)}]}_{\hat{0} \text{ wie auf Seite 63}} + \underbrace{[\hat{J}_k^{(2)}, \hat{\vec{J}}^{2(1)}]}_{\hat{0} \text{ wie bei Wahl (1)}} = \hat{0} .$$

Was sind die möglichen Werte von J und M? (j_1, j_2 fixiert)

* In der Basis $|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle$ gibt es $(2j_1+1)\times(2j_2+1)$ Zustände; so muss es auch in der Basis $|JM\rangle$ sein. ...

* $\hat{J}_3 = \hat{J}_3^{(1)} + \hat{J}_3^{(2)} \Rightarrow M = m_1 + m_2$.

*
$$-j_1 \le m_1 \le j_1 \quad \text{und} \quad -j_2 \le m_2 \le j_2$$

$$\overset{(M=m_1+m_2)}{\Longleftrightarrow} \quad -j_1 \le M-m_2 \le j_1 \quad \text{und} \quad -j_2 \le M-m_1 \le j_2$$

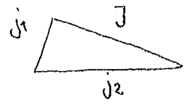
$\left\{\begin{matrix} M \to J \\ m_2 \to j_2 \end{matrix}\right.$ (links) bzw. $\left\{\begin{matrix} M \to J \\ m_1 \to j_1 \end{matrix}\right.$ (rechts)

$$\Rightarrow \quad -j_1 \le J-j_2 \le j_1 \quad \text{und} \quad -j_2 \le J-j_1 \le j_2$$

$$\Leftrightarrow \quad j_2-j_1 \le J \le j_1+j_2 \quad \text{und} \quad j_1-j_2 \le J \le j_1+j_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|j_1-j_2| \le J \le j_1+j_2}$$

Graphisch:



* Die Quantenzahlen m_i wachsen in Einheiten von 1 ($m_i \in \{-j_i, -j_i+1, \ldots, j_i-1, j_i\}$) $\Rightarrow$ die Quantenzahl $M = m_1+m_2$ wächst in Einheiten von 1 $\Rightarrow$ alle J müssen entweder halbe oder ganze Zahlen sein

$$\Rightarrow \quad \boxed{J \in \{|j_1-j_2|, |j_1-j_2|+1, \ldots, j_1+j_2-1, j_1+j_2\}}$$

* Die Gesamtzahl der Zustände (sei $j_1 \ge j_2$):

$$\sum_{J=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2J+1) = \sum_{J=1}^{j_1+j_2} (2J+1) - \sum_{J=1}^{j_1-j_2-1} (2J+1)$$

$\left| \begin{matrix} \sum_{i=1}^{n} = n \\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \end{matrix} \right.$

angenommen J sei ganzzahlig; das Endergebnis gilt aber auch für halbzahlige J.

$$= \underbrace{(j_1+j_2)}_{n}\underbrace{(j_1+j_2+1)}_{(n+1)} + \underbrace{j_1+j_2}_{n} - \underbrace{(j_1-j_2-1)}_{n}\underbrace{(j_1-j_2)}_{n+1} - \underbrace{j_1+j_2+1}_{-n}$$

$$= (2j_1+1)(2j_2+1) \qquad !$$

$\Rightarrow$ Die unterschiedlichen J-Werte sind „<u>nicht entartet</u>", d.h. werden nur einmal gezählt.

$$\left(\text{Mathematisch:} \quad \underbrace{D_{j_1} \otimes D_{j_2}}_{\text{„Produktdarstellung"}} = \underbrace{D_{|j_1-j_2|} \oplus D_{|j_1-j_2|+1} \oplus \ldots \oplus D_{j_1+j_2}}_{\text{„Ausreduktion"}} \right)$$

Bestimmung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Wir benutzen wieder die Leiteroperatoren sowie die allgemeinen Ergebnisse aus Seite 68:

$$\hat{J}_\pm |j,m\rangle = C_\pm(j,m)\,|j,m\pm 1\rangle ,$$
$$C_+(j,m) = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)} ,$$
$$C_-(j,m) = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)} . \qquad (*)$$

Die Schritte:

(a) Betrachten wir zuerst den Zustand $|JJ\rangle$.
Weil $m_1+m_2=M$ gilt, ist

$$|JJ\rangle = \sum_n a_n\,|j_1\,\overbrace{(j_1-n)}^{m_1}\rangle\,|j_2\,\overbrace{(J-j_1+n)}^{m_2}\rangle ,$$

wobei $n\in\{0,1,\dots\}$ alle Werte mit $\begin{Bmatrix} -j_1 \le j_1-n \le j_1 \\ -j_2 \le J-j_1+n \le j_2 \end{Bmatrix}$ nimmt.

(b) Wir operieren mit $\hat{J}_+ = \hat{J}_+^{(1)} + \hat{J}_+^{(2)}$ auf diese Gleichung.
Die linke Seite ergibt null; auf der rechten Seite benutzen wir $(*)$.

(c) Damit erhalten wir homogene Gleichungen für die $\{a_n\}$.

(d) Dazu kommt die Normierungsbedingung $\sum_n |a_n|^2 = 1$.

(e) Eine Phasenkonvention muss noch gewählt werden.
Condon-Shortley: $a_0 > 0$.

(f) $|J(J-1)\rangle$ durch Operation mit $\hat{J}_- = \hat{J}_-^{(1)} + \hat{J}_-^{(2)}$, usw.

Beispiel: $\quad j_1 = 2\,,\quad j_2 = 3\,,\qquad J = 3 \in \{\overset{|j_1-j_2|}{1}, 2, 3, 4, \overset{j_1+j_2}{5}\}$.

$$\underset{JM}{|33\rangle} = a_0\, \underset{m_1}{|22\rangle}\underset{m_2}{|31\rangle} + a_1\, \underset{m_1}{|21\rangle}\underset{m_2}{|32\rangle} + a_2\, \underset{m_1}{|20\rangle}\underset{m_2}{|33\rangle} \qquad \Big|\, \hat{J}_+$$

$$0 = a_0\, \hat{j}^{(2)}_+ |22\rangle|31\rangle + a_1 \left(\hat{j}^{(1)}_+ + \hat{j}^{(2)}_+\right)|21\rangle|32\rangle + a_2\, \hat{j}^{(1)}_+ |20\rangle|33\rangle$$

$$= \hbar\left\{a_0\sqrt{2\cdot 5}\,|22\rangle|32\rangle + a_1\sqrt{1\cdot 4}\,|22\rangle|32\rangle + a_1\sqrt{1\cdot 6}\,|21\rangle|33\rangle + a_2\sqrt{2\cdot 3}\,|21\rangle|33\rangle\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{10}\,a_0 + 2a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$

$$a_1 = -\sqrt{\tfrac{5}{2}}\,a_0 \qquad a_2 = \sqrt{\tfrac{5}{2}}\,a_0$$

Normierung: $\quad |a_0|^2\left(1 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right) = 1 \qquad |a_0| = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Phasenkonvention: $\quad a_0 = +\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\sqrt{\frac{5}{12}}\,, \qquad a_2 = \sqrt{\frac{5}{12}}$

Folglich:

$$C_-(3,3)\ \underset{JM}{|32\rangle} = a_0\left\{C_-(2,2)\,|21\rangle|31\rangle + C_-(3,1)\,|22\rangle|30\rangle\right\}$$
$$+\, a_1\left\{C_-(2,1)\,|20\rangle|32\rangle + C_-(3,2)\,|21\rangle|31\rangle\right\}$$
$$+\, a_2\left\{C_-(2,0)\,|2\,{-1}\rangle|33\rangle + C_-(3,3)\,|20\rangle|32\rangle\right\}$$
$$= \ldots$$

In der Praxis findet man die Clebsch-Gordan-Koeffizienten in Tabellen [z.B. auf der Vorlesungswebseite].
Manchmal werden sie auch als „3j-Symbole" ausgedrückt:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} := \frac{(-1)^{j_1-j_2-M}}{\sqrt{2J+1}}\,\langle j_1 m_1; j_2 m_2 \,|\, J\, {-M}\rangle\,.$$
