5.2 Eigenwerte des Drehimpulses [Fliessbach 3.6, Griffiths 4.3]

Die Lie-Algebra des Bahndrehimpulses $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ (Seite 64; $\Psi'(\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\vec{n}\cdot\hat{\vec{L}}}\Psi(\vec{r})$)

$$[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar\,\varepsilon_{jkm}\hat{L}_m\,.$$

„Einstein-Konvention": über wiederholte Indizes wird summiert!

Dieselbe Algebra gilt aber auch für Matrixgeneratoren der SO(3):

$$[\Sigma_j, \Sigma_k] = i\,\varepsilon_{jkm}\Sigma_m \qquad (\text{Seite } 63;\ \vec{r}\,' = e^{-i\alpha\vec{n}\cdot\vec{\Sigma}}\,\vec{r}\,)$$

$$\Rightarrow\ [\hbar\Sigma_j, \hbar\Sigma_k] = i\hbar\,\varepsilon_{jkm}\hbar\Sigma_m$$

Diese Algebra wird im Allgemeinen die „<u>Drehimpulsalgebra</u>" genannt. Wir bezeichnen die entsprechenden Generatoren mit $\hat{J}_i$.

Wie beim harmonischen Oszillator können die Eigenwerte und Eigenzustände rein algebraisch bestimmt werden!

<u>Bemerkungen:</u>

(i) „Kugelsymmetrie" $\Leftrightarrow$ $[\hat{H}, \hat{J}_i] = \hat{0}$ (vgl. Aufgabe 4.2)

Seite 44 $\Rightarrow$ Eigenzustände von $\hat{J}_i$ sind auch Eigenzustände von $\hat{H}$.

(ii) $[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hbar\hat{J}_3$; $[\hat{J}_2, \hat{J}_3] = i\hbar\hat{J}_1$; $[\hat{J}_3, \hat{J}_1] = i\hbar\hat{J}_2$.

Seite 44 $\Rightarrow$ es gibt <u>keine</u> gleichzeitigen Eigenzustände von $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$ <u>und</u> $\hat{J}_3$.
Wir <u>wählen</u> im Folgenden diejenigen von $\hat{J}_3$.

(iii) $[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_i] \overset{!}{=} [\hat{\vec{J}}^2, \hat{H}] = \hat{0}$ (vgl. Aufgabe 4.1)

$\Rightarrow$ $\hat{\vec{J}}^2$ <u>hat</u> gleichzeitige Eigenzustände mit $\hat{J}_3$ und $\hat{H}$.

Notation: $$\hat{\vec{J}}^2\,|\lambda,m\rangle = \hbar^2\lambda\,|\lambda,m\rangle\ ,$$
$$\hat{J}_3\,|\lambda,m\rangle = \hbar\, m\,|\lambda,m\rangle\ ,$$
$$\langle\lambda,m\,|\,\lambda',m'\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta_{mm'}\ .$$

$\hat{J}_i$ hermitesch

Es gilt: $$\lambda\hbar^2 = \langle\lambda,m|\,\hat{\vec{J}}^2\,|\lambda,m\rangle = \sum_{i=1}^{3}\langle\lambda,m|\hat{J}_i\hat{J}_i\,|\lambda,m\rangle = \sum_{i=1}^{3}\|\hat{J}_i|\lambda,m\rangle\|^2 \geq 0\ .$$

Definitionen: $$\hat{J}_+ := \hat{J}_1 + i\hat{J}_2\quad ;\quad \hat{J}_- := \hat{J}_1 - i\hat{J}_2\quad ;\quad \hat{J}_+^+ = \hat{J}_-\ .$$

Vertauschungen:

(i) $$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_\pm] = \hat{0}\ .$$

(ii) $$[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = [\hat{J}_3, \hat{J}_1] \pm i\,[\hat{J}_3,\hat{J}_2] = i\hbar\hat{J}_2 \pm \hbar\hat{J}_1 = \pm\hbar\hat{J}_\pm\ .$$

(iii) $$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = i\,[\hat{J}_2,\hat{J}_1] - i\,[\hat{J}_1,\hat{J}_2] = 2\hbar\hat{J}_3$$

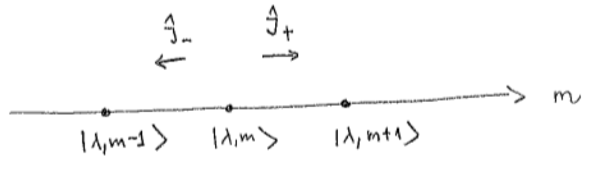
(iv) $$\hat{\vec{J}}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 = (\hat{J}_1 + i\hat{J}_2)(\hat{J}_1 - i\hat{J}_2) + \hat{J}_3^2 + i\,[\hat{J}_1,\hat{J}_2]$$
$$= \hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_3^2 - \hbar\hat{J}_3 \underset{(iii)}{=} \hat{J}_-\hat{J}_+ + \hat{J}_3^2 + \hbar\hat{J}_3\ .$$

Konsequenzen:

(a) $$\hat{\vec{J}}^2\,(\hat{J}_\pm|\lambda,m\rangle) \overset{(i)}{=} \hbar^2\lambda\,(\hat{J}_\pm|\lambda,m\rangle)$$

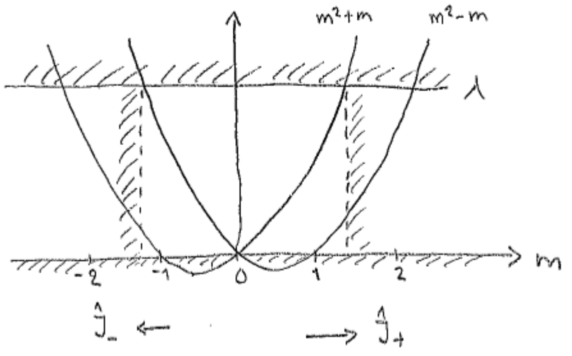
$\Rightarrow$ Eigenwert von $\hat{\vec{J}}^2$ wird von $\hat{J}_\pm$ nicht verändert.

(b) $$\hat{J}_3\,(\hat{J}_\pm|\lambda,m\rangle) = \{\hat{J}_\pm\hat{J}_3 + [\hat{J}_3,\hat{J}_\pm]\}\,|\lambda,m\rangle$$
$$\underset{(ii)}{=} \hbar(m\pm1)\,(\hat{J}_\pm|\lambda,m\rangle)$$



(c) $$0 \leq \|\hat{J}_\pm|\lambda,m\rangle\|^2 = \langle\lambda,m|\,\hat{J}_\mp\hat{J}_\pm\,|\lambda,m\rangle$$
$$\underset{(iv)}{=} \langle\lambda,m|\,\hat{\vec{J}}^2 - \hat{J}_3^2 \mp \hbar\hat{J}_3\,|\lambda,m\rangle = \hbar^2(\lambda - m^2 \mp m)\ .$$

Also gilt $m^2 \pm m \leq \lambda$. Graphisch:



$\Rightarrow$ es muss $m_{max} =: j$ existieren, so dass $\hat{J}_+ |\lambda, j\rangle = 0$ gilt

$$\Rightarrow \| \hat{J}_+ |\lambda, j\rangle \| = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda = j(j+1)}$$

Wegen Symmetrie ist $m_{min} = -j$, und $\hat{J}_- |\lambda, -j\rangle = 0$ *.

Die möglichen Werte von m sind also $-j, -j+1, \ldots, j-1, j$.

Es gibt $2j+1$ solche Werte $\Rightarrow 2j+1 \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \underline{j \in \{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \ldots\}}.$$

<u>Neue Notation</u>: statt $|\lambda, m\rangle = |j(j+1), m\rangle$ einfach $|j, m\rangle$.

<u>Fazit:</u>

$$\hat{\vec{J}}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle$$

$$\hat{J}_3 |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$$

$$j \in \{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \ldots\}$$ „Drehimpuls ist quantisiert".

$$m \in \{-j, -j+1, \ldots, j-1, j\}$$; $2j+1$ Stück.

---

* Check: $\| \hat{J}_- |\lambda, m\rangle \|^2 \underset{\text{Seite 66}}{=} \hbar^2 (\lambda - m^2 + m) \underset{\lambda = j(j+1),\ m=-j}{=} \hbar^2 (j(j+1) - j^2 - j) = 0$ OK!

Appendix: Normierung der Eigenzustände (vgl. Seite 59)

$$\hat{J}_+ |j,m\rangle = C_+(j,m)\,|j,m+1\rangle \qquad \Big|\, (\ldots)^\dagger$$

$$\langle j,m|\,\hat{J}_- = C_+^*(j,m)\,\langle j,m+1|$$

$$\Rightarrow \langle j,m|\underbrace{\hat{J}_-\hat{J}_+}_{\hat{\vec{J}}^2 - \hat{J}_3^2 - \hbar \hat{J}_3}|j,m\rangle = |C_+(j,m)|^2 \underbrace{\langle j,m+1|j,m+1\rangle}_{1}$$

(iv) auf Seite 66

$$\Rightarrow |C_+(j,m)|^2 = \hbar^2\left[j(j+1) - m(m+1)\right]$$
$$\stackrel{!}{=} \hbar^2 (j-m)(j+m+1)$$

Mit der sogenannten „Condon-Shortley-Phasenkonvention":

$$C_+(j,m) := \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)} \ .$$

Auf derselben Weise:

$$\hat{J}_-|j,m\rangle = C_-(j,m)\,|j,m-1\rangle \ ,$$
$$C_-(j,m) := \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)} \ .$$

Damit können alle möglichen Matrixelemente berechnet werden:

$$\langle j',m'|\,\hat{J}_3\,|j,m\rangle = \hbar m\,\delta_{jj'}\delta_{mm'} \ ,$$

$$\langle j',m'|\,\hat{J}_1\,|j,m\rangle = \frac{1}{2}\langle j',m'|\,\hat{J}_+ + \hat{J}_-\,|j,m\rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2}\left[C_+(j,m)\,\delta_{jj'}\,\delta_{(m+1)m'} + C_-(j,m)\,\delta_{jj'}\,\delta_{(m-1)m'}\right] ,$$

$$\langle j',m'|\,\hat{J}_2\,|j,m\rangle = \frac{i}{2}\langle j',m'|\,\hat{J}_- - \hat{J}_+\,|j,m\rangle$$
$$= \frac{i\hbar}{2}\left[C_-(j,m)\,\delta_{jj'}\,\delta_{(m-1)m'} - C_+(j,m)\,\delta_{jj'}\,\delta_{(m+1)m'}\right] .$$

— o —