Fortsetzung von QT I

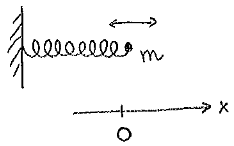
4. Harmonischer Oszillator

[Fliessbach 12,34; Griffiths 2.3]

Fortsetzung von QT I

Zur Wiederholung des allgemeinen Formalismus betrachten wir den harmonischen Oszillator. Dies ist eines der wenigen Systeme in der Quantenmechanik, wobei wir eine exakte Lösung finden können, und hat ausserdem sehr viele Anwendungen — sogar in der relativistischen Quantenfeldtheorie!

Klassisch :



„Federkonstante"

Hookesches Gesetz: $F = -kx$

„lineare Physik"

Notation : $k =: m\omega^2$

Potential : $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

„quadratisches System"

Lösung: $x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t$.

Quantenmechanisch :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \quad ; \qquad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \; .$$

Wir führen ein:

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\, \hat{p} \; ,$$

$$\hat{a}^+ := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\, \hat{p} \; .$$

Nicht hermitesch $\Rightarrow$ keine Observablen !

$$\Leftrightarrow \quad \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, (\hat{a} + \hat{a}^+) \; ,$$

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\, \frac{(\hat{a} - \hat{a}^+)}{i} \; .$$

Es folgt:

$*\quad [\hat{a},\hat{a}] = [\hat{a}^+,\hat{a}^+] = 0 \qquad$ (trivial)

$*\quad [\hat{a},\hat{a}^+] = \frac{-i}{2\hbar}[\hat{x},\hat{p}] + \frac{i}{2\hbar}[\hat{p},\hat{x}] = \hat{\mathbb{1}}$.

$$* \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\left[-(\hat{a}-\hat{a}^+)(\hat{a}-\hat{a}^+)\right] + \frac{\hbar\omega}{4}\left[(\hat{a}+\hat{a}^+)(\hat{a}+\hat{a}^+)\right]$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\left[-\cancel{\hat{a}\hat{a}} + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+ - \cancel{\hat{a}^+\hat{a}^+} + \cancel{\hat{a}\hat{a}} + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+ + \cancel{\hat{a}^+\hat{a}^+}\right]$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right).$$

$*$ Definition : $\hat{N} := \hat{a}^+\hat{a} \quad ; \quad \hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$.

Die Eigenzustände von $\hat{N}$ sind auch die Eigenzustände von $\hat{H}$.

$$[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$$

$$* \quad [\hat{N},\hat{a}] = [\hat{a}^+\hat{a},\hat{a}] = [\hat{a}^+,\hat{a}]\hat{a} = -\hat{a} \, ,$$

$$[\hat{N},\hat{a}^+] = [\hat{a}^+\hat{a},\hat{a}^+] = \hat{a}^+[\hat{a},\hat{a}^+] = \hat{a}^+ \, .$$

Seien $|\lambda\rangle$ die Eigenzustände von $\hat{N}$ (und $\hat{H}$): $\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$.

Dann gilt:

(i) $\quad \lambda = \langle\lambda|\lambda|\lambda\rangle = \langle\lambda|\hat{a}^+\hat{a}|\lambda\rangle = \|\hat{a}|\lambda\rangle\|^2 \geq 0$.

(ii) $\quad \hat{N}\hat{a}|\lambda\rangle = \left(\hat{a}\hat{N} + [\hat{N},\hat{a}]\right)|\lambda\rangle = (\lambda-1)\,\hat{a}|\lambda\rangle$

$\Rightarrow$ $\hat{a}|\lambda\rangle$ ist auch ein Eigenzustand, aber mit Eigenwert $\lambda-1$; $\hat{a}$ wird „Vernichtungs-" bzw. „Absteigeoperator" genannt.

(iii) $\quad \hat{N}\hat{a}^+|\lambda\rangle = \left(\hat{a}^+\hat{N} + [\hat{N},\hat{a}^+]\right)|\lambda\rangle = (\lambda+1)\,\hat{a}^+|\lambda\rangle$

$\Rightarrow$ $\hat{a}^+|\lambda\rangle$ ist auch ein Eigenzustand, aber mit Eigenwert $\lambda+1$; $\hat{a}^+$ wird „Erzeugungs-" bzw. „Aufsteigeoperator" genannt.

Also hat $\hat{a}|\lambda\rangle$ den Eigenwert $\lambda - 1$;
$(\hat{a})^n|\lambda\rangle$ den Eigenwert $\lambda - n$.

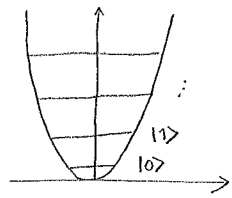
Aber alle Eigenwerte sind nichtnegativ $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda \in \{0, 1, 2, \dots\} \text{ und } \hat{a}|0\rangle = 0 \ !}$

Vgl. Aufgabe 1.1(a)

Von nun an: $\lambda \to n$; $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$,
$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle$.

Der Zustand $|0\rangle$ heisst „Grundzustand". Der entsprechende Energie-Eigenwert ist nicht null sondern $\frac{\hbar\omega}{2}$, „Nullpunktsenergie".

Die anderen Zustände: $|n\rangle = C_n \cdot (\hat{a}^+)^n |0\rangle$.



<u>Bestimmung der Normierungskonstanten:</u>

$$|n\rangle = C_n (\hat{a}^+)^n |0\rangle = \frac{C_n}{C_{n-1}} \hat{a}^+ |n-1\rangle$$

$$1 = \langle n|n\rangle = \left|\frac{C_n}{C_{n-1}}\right|^2 \langle n-1|\underbrace{\hat{a}\hat{a}^+}_{\hat{N} + [\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{N} + \hat{1}}|n-1\rangle$$

$$= \left|\frac{C_n}{C_{n-1}}\right|^2 \langle n-1|\, n-1+1 \,|n-1\rangle = \left|\frac{C_n}{C_{n-1}}\right|^2 \cdot n$$

$$|C_n| = |C_{n-1}| \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \quad , n \geq 1 \quad (c_0 := 1, \text{ vgl. oben})$$

$$\Rightarrow \quad |C_1| = 1, \quad |C_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |C_3| = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}}, \quad |C_n| = \frac{1}{\sqrt{n!}}$$

Falls wir die C_n als reell und positiv wählen, gilt also *

$$\underline{\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle} \quad ,$$

und auch (Aufgabe 1.1)

$$\underline{\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle} \quad .$$

---

* Wie oben aber mit $n \to n+1$: $|n+1\rangle = \frac{C_{n+1}}{C_n} \hat{a}^+|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \hat{a}^+|n\rangle$.

Appendix: Wellenfunktionen in Ortsdarstellung.

$$\psi_n(x) := \langle x | n \rangle .$$

Fangen wir mit dem Grundzustand an.

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad \Big| \langle x| \quad \text{vom links}$$

$$\hat{\mathbb{1}} = \int dx' \, |x'\rangle\langle x'|$$

$$\int dx' \, \langle x| \underbrace{\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat{p}}_{\hat{a}} |x'\rangle \underbrace{\psi_0(x')}_{\langle x'|0\rangle} = 0$$

Seite 42: $\langle x|\hat{x}|x'\rangle = x\,\delta(x-x')$

Seite 43: $\langle x|\hat{p}|x'\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx}\,\delta(x-x')$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x\,\psi_0(x) + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\frac{d}{dx}\psi_0(x) = 0$$

$$\frac{\frac{d\psi_0(x)}{dx}}{\psi_0(x)} = -x \cdot \frac{m\omega}{\hbar}$$

$$\psi_0(x) = C \cdot \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\psi_0(x)|^2 \quad \Rightarrow \quad |C| = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Und dann:

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \langle x| \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n |0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\frac{d}{dx}\right)^n \psi_0(x) .$$

— o —