Quantentheorie I — **Übungsblatt Nr. 12**

Aufgabe 1: Sei $\hat{p}$ ein hermitescher Projektionsoperator, d.h. $\hat{p}^\dagger = \hat{p}$, $\hat{p}^2 = \hat{p}$, und nehmen wir ausserdem an, dass $\mathrm{Sp}\,[\hat{p}] = 1$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass die einzig möglichen Eigenwerte von $\hat{p}$ gleich 0 und 1 sind.

(b) Zeigen Sie, dass es nur einen linear unabhängigen Zustand mit Eigenwert 1 gibt.

Aufgabe 2: Sei $\hat{\rho} = Z^{-1}\exp(-\beta\hat{H})$, wobei $\hat{H}$ der Hamilton-Operator ist. Wie müssen β und Z gewählt werden, um $\hat{\rho}$ als einen statistischen Operator interpretieren zu können?

In der Prüfung sind keine Hilfsmittel erlaubt, aber die folgende Tabelle wird auf dem Prüfungsblatt gegeben:

$i\hbar\,\partial_t\psi = \hat{H}\,\psi$	$f(\vec{r}\,) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\tilde{f}(\vec{k}\,)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$	$\langle x\vert\hat{p}\vert y\rangle = -i\hbar\,\partial_x\delta(x-y)$
$\hat{H} = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\vec{r}\,)$	$T(E) = \frac{\vert\vec{j}(x>+\frac{L}{2};\text{nach rechts})\vert}{\vert\vec{j}(x<-\frac{L}{2};\text{nach rechts})\vert}$	$\langle x\vert y\rangle = \delta(x-y)$
$\rho = \vert\psi\vert^2$	$= C(E)\,e^{-\frac{2}{\hbar}\int_a^b \mathrm{d}x\,\sqrt{2m[V(x)-E]}}$	$\langle\psi_m\vert\psi_n\rangle = \delta_{mn}$
$\vec{j} = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\,(\psi^*\nabla\psi)$	$[\,\hat{x}_m\,,\hat{p}_n\,] = i\hbar\,\delta_{mn}$	$\mathbb{1} = \int \mathrm{d}x\,\vert x\rangle\langle x\vert = \sum_n \vert\psi_n\rangle\langle\psi_n\vert$
$\psi(\vec{r},t) = \Sigma\!\!\int_E c_E\psi_E(\vec{r}\,)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$	$\theta'(x-x_0) = \delta(x-x_0)$	$\hat{\rho} = \sum_n \vert\psi_n\rangle p_n\langle\psi_n\vert$