Quantentheorie I **Übungsblatt Nr. 11**

Aufgabe 1: Betrachtet wird ein Hilbert-Raum, der nur zwei orthonormierte Basiszustände hat, bezeichnet mit $|\frac{1}{2}\rangle$ und $|\text{-}\frac{1}{2}\rangle$. Sei $|\psi\rangle := (e^{i\alpha}|\frac{1}{2}\rangle + e^{i\beta}|\text{-}\frac{1}{2}\rangle)/\sqrt{2}$ ein reiner Zustand.

(a) Zeigen Sie, dass $|\psi\rangle$ richtig normiert ist.

(b) Begründen Sie die Notation

$$\hat{\rho}(\psi) = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{i(\alpha-\beta)} \\ e^{i(\beta-\alpha)} & 1 \end{pmatrix} .$$

(c) Zeigen Sie, dass gilt: $\mathrm{Sp}\,[\hat{\rho}(\psi)] = 1$, $\mathrm{Sp}\,[\hat{\rho}^2(\psi)] = 1$.

(d) Sei nun

$$\hat{\rho}_{\mathsf{Gemisch}} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha\, \hat{\rho}(\psi) .$$

Zeigen Sie, dass gilt: $\mathrm{Sp}\,[\hat{\rho}_{\mathsf{Gemisch}}] = 1$, $\mathrm{Sp}\,[\hat{\rho}^2_{\mathsf{Gemisch}}] < 1$.

Aufgabe 2: Sei $\hat{\rho}$ ein statistischer Operator ($\hat{\rho} = \sum_n |\psi_n\rangle\, p_n\, \langle\psi_n|$, mit $0 \leq p_n \leq 1$ und $\sum_n p_n = 1$), $\hat{A}, \hat{B}$ Observablen und $|\psi\rangle$ ein beliebiger reiner Zustand. Zeigen Sie, dass im Hilbert-Raum Folgendes gilt:

(a) $\mathrm{Sp}\,[\hat{A}\hat{B}] = \mathrm{Sp}\,[\hat{B}\hat{A}]$,

(b) $\mathrm{Sp}\,[|\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}] = \langle\psi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle$,

(c) $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$,

(d) $\mathrm{Sp}\,[\hat{\rho}] = 1$.