Quantentheorie I	**Übungsblatt Nr. 10**

Aufgabe 1:

(a) Sei $V(\hat{x})$ ein Polynom in $\hat{x}$. Schreiben Sie den Kommutator $[\hat{p}, V(\hat{x})]$ in eine Form um, die keine Abhängigkeit vom Operator $\hat{p}$ aufweist.

(b) Zeigen Sie, ausgehend vom Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$ und dem Ehrenfestschen Theorem (lec 12), $i\hbar\, \mathrm{d}\langle\hat{A}\rangle/\mathrm{d}t = \langle[\hat{A}, \hat{H}]\rangle$, dass quantenmechanische Erwartungswerte eine nahezu klassische Gleichung erfüllen:

$$m \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \langle\hat{x}\rangle = -\langle V'(\hat{x})\rangle \ .$$

Aufgabe 2: Seien $|x\rangle$ und $|y\rangle$ Eigenzustände des Ortsoperators $\hat{x}$. Bestimmen Sie, ausgehend vom Matrixelement $\langle x|\,\hat{p}\,|y\rangle$ aus der Vorlesung (lec 11), die funktionale Form der Übergangsamplitude $\langle x|p\rangle$, wobei $|p\rangle$ ein Eigenzustand des Impulsoperators $\hat{p}$ ist: $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$. (Die Gesamtnormierung können Sie offen lassen.)

Aufgabe 3: Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei Operatoren, die der Vertauschungsrelationen $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ genügen. Verifizieren Sie die Gültigkeit der Gleichung (ein Spezialfall der sogenannten Campbell-Baker-Hausdorff-Formel)

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} \ .$$

[Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\hat{C}(t) := \exp[-t(\hat{A} + \hat{B})] \exp(t\hat{A}) \exp(t\hat{B})$. Leiten Sie zuerst die Differenzialgleichung $\mathrm{d}\hat{C}/\mathrm{d}t = t[\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$ her (hier kommt das Ergebnis von Aufgabe 9.1 zum Tragen). Lösen Sie die Differenzialgleichung, und setzen Sie folglich $t = 1$.]