## 3.3. Zeitentwicklung, Bilder

[Fliessbach 15, 38, 35 ; Griffiths Anhang A]

Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle .$$

(vielleicht besser: $|\psi\rangle \to |E\rangle$ oder $|\psi_E\rangle$)

Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung [im „Schrödinger-Bild"]:

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle}$$

„Hamilton-Operator erzeugt Zeitentwicklung"

Wir bezeichnen die Lösung mit $|\psi(t)\rangle$ und schreiben

$$|\psi(t)\rangle =: \hat{U}(t;t_0)\,|\psi(t_0)\rangle ,$$

wobei $\hat{U}(t;t_0)$ der Zeitentwicklungsoperator heisst.

Der Zeitentwicklungsoperator erfüllt die Gleichungen

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t;t_0) = \hat{H}\hat{U}(t;t_0) , \\ \hat{U}(t_0;t_0) = \hat{\mathbb{1}} . \end{cases}$$

Der Zeitentwicklungsoperator besitzt wichtige Eigenschaften:

(i) $\hat{U}(t;t_0)$ ist unitär, d.h. $\hat{U}^+\hat{U} = \hat{\mathbb{1}} \quad \forall\, t$

Schrödinger-Gl. für einen konjugierten Vektor:

$$\langle i\hbar \tfrac{d}{dt}\psi| = -i\hbar \langle \tfrac{d\psi}{dt}| = \langle \hat{H}\psi| = \langle\psi|\hat{H}^+$$

$\hat{H}^+ = \hat{H}$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt}\langle\psi_1|\psi_2\rangle = -\langle\psi_1|\hat{H}^+|\psi_2\rangle + \langle\psi_1|\hat{H}|\psi_2\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle = \langle\psi_1(t_0)|\,\hat{U}^+(t;t_0)\,\hat{U}(t;t_0)\,|\psi_2(t_0)\rangle$$ ist zeitunabhängig

$$\Rightarrow \hat{U}^+(t;t_0)\hat{U}(t;t_0) = \hat{\mathbb{1}} .$$

(ii) $\hat{U}(t;t_0)$ kann formal als $\hat{U}(t;t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right)$ ausgedrückt werden

* $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n (t-t_0)^n \hat{H}^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^{n-1}(t-t_0)^{n-1}\hat{H}^n$$

$$\overset{n=1+m}{=} \hat{H}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^m (t-t_0)^m \hat{H}^m = \hat{H}\,U(t;t_0) . \quad \square$$

* $$\hat{U}(t_0;t_0) = \exp(\hat{0}) = \hat{\mathbb{1}} . \quad \square$$

Interessante Fölgen:

(a) Zeitentwicklung in Energiebasis

Wir schreiben den Anfangszustand als

$$|\Psi(t_0)\rangle = \sum_E |E\rangle\langle E|\Psi\rangle = \sum_E c_E |E\rangle, \qquad c_E := \langle E|\Psi(t_0)\rangle.$$

Dann ist

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_E c_E \, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} |E\rangle$$

$$= \sum_E c_E \, e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)} |E\rangle \qquad \text{(vgl. Seite 13)}$$

Wahrscheinlichkeit für den Energie-Eigenwert $E'$:

$$P_\Psi(E') = |\langle E'|\Psi(t)\rangle|^2 = |c_{E'}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E'(t-t_0)}|^2 \stackrel{!}{=} |c_{E'}|^2.$$

Diese bleibt unverändert, obwohl $|\Psi(t)\rangle \neq |\Psi(t_0)\rangle$ !

(b) Zeitentwicklung der Erwartungswerte

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle\Psi(t)|\hat{A}|\Psi(t)\rangle = -\langle\Psi(t)|\hat{H}\hat{A}|\Psi(t)\rangle + \langle\Psi(t)|\hat{A}\hat{H}|\Psi(t)\rangle$$

$$= \langle\Psi(t)|[\hat{A},\hat{H}]|\Psi(t)\rangle$$

„das Ehrenfestsche Theorem".

D.h., Erwartungswert ist zeitunabhängig genau dann, wenn der Operator mit dem Hamilton-Operator vertauscht.

Eine solche Observable nennen wir Erhaltungsgrösse.

Betrachten wir letztendlich Zeitabhängigkeit aus einem anderen Winkel, nämlich durch die Einführung des „Heisenberg-Bildes":

Schrödinger-Bild:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \qquad \text{„Zustände sind zeitabhängig".}$$

$$\frac{d}{dt} \hat{A} = 0 \qquad \text{„Operatoren aber nicht".}$$

$$\langle \hat{A} \rangle (t) = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle .$$

Heisenberg-Bild:

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{U}^{+}(t;0) \hat{A} \hat{U}(t;0) | \Psi(0) \rangle$$

Wir definieren: $|\Psi_H\rangle := |\Psi(0)\rangle$

$$= U^{+}(t;0) |\Psi(t)\rangle .$$

„Zustände sind zeitunabhängig"

$$\hat{A}_H(t) := \hat{U}^{+}(t;0) \hat{A} \hat{U}(t;0)$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \hat{A} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

„Operatoren sind zeitabhängig"

Physikalische Erwartungswerte bleiben unverändert; die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung wird aber ersetzt durch

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = -\hat{H} \hat{A}_H(t) + \hat{A}_H(t) \hat{H} = [\hat{A}_H(t), \hat{H}] .$$

(vgl. Seite 46).

---

## Zusammenfassung: Postulate der Quantenmechanik (IV) (vgl. Seite 40)

IV. Die zeitliche Entwicklung von Zuständen im Schrödinger-Bild wird durch die Schrödinger-Gleichung bestimmt:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle,$$

wobei $\hat{H}$ der Hamilton-Operator ist.

# Appendix: Einsicht in die Quantisierung

Auch die klassischen Bewegungsgleichungen können in verschiedenen „Bildern" dargestellt werden.

**Newton**: $\dot{p} = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$

**Hamilton**: (Mechanik II)

$$H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad ; \; x, p \text{ formal unabhängig}$$

Poisson-Klammer:

$$\{F, G\} := \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial x} .$$

Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} \{x,x\} &= 0 \\ \{p,p\} &= 0 \\ \{x,p\} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{„kanonische Normierung"}^{*}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H\} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= \{p, H\} = -\frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{„Dynamik"}$$

**Quantisierung**: $x \to \hat{x}, \quad p \to \hat{p}, \quad \{\cdot,\cdot\} \to \frac{1}{i\hbar}[\cdot,\cdot]$

$$\left.\begin{aligned} [\hat{x},\hat{x}] &= 0 \\ [\hat{p},\hat{p}] &= 0 \\ [\hat{x},\hat{p}] &= i\hbar \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{gleichzeitige Vertauschungs-} \\ \text{relationen:} \\ \text{„kanonische Quantisierung"}\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= [\hat{x}, \hat{H}] \\ i\hbar \frac{d}{dt}\hat{p}(t) &= [\hat{p}, \hat{H}] \end{aligned}\right\} \text{„Dynamik" im Heisenberg-Bild}$$

---

* Kanonische Transformation: $X = X(x,p)$, $P = P(x,p)$ so dass $\{F,G\}_{XP} = \{F,G\}_{xp}$ gilt. Schematisch:

$$\begin{tikzcd} x,p \arrow[r, "\text{kanonische}", "\text{Transformation}"'] \arrow[d, "\text{kanonische Quantisierung}"'] & X,P \arrow[d] \\ \hat{x},\hat{p} \arrow[r, "\text{unitäre}", "\text{Transformation}"'] & \hat{X},\hat{P} \end{tikzcd}$$