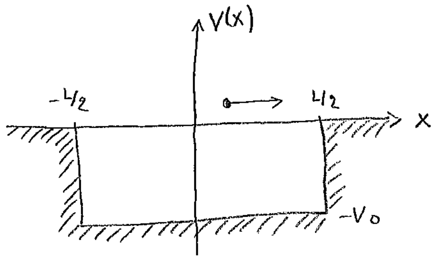
2.3 Streuung am Kastenpotential [Fliessbach 18; Griffiths Aufgaben 2.52, 2.53]

Wir kehren zurück zum Kastenpotential (Seite 21), aber betrachten jetzt Energien $E > 0$.



Notation: $E =: \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$; $E + V_0 =: \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (dies ist die kinetische Energie: $T = E - V = E + V_0$)

$x < -\frac{L}{2}$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right] \psi_E(x) = E\, \psi_E(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi_E'' = -k_0^2 \psi_E$$

$$\psi_E = A e^{ik_0 x} + B e^{-ik_0 x}$$

Diese Wellenfunktion ist im gewöhnlichen Sinne ($\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi_E(x)|^2 = 1$) nicht normierbar. Es handelt sich um einen Streuzustand. Trotzdem hat der Wahrscheinlichkeitsstrom $\vec{j}$ (Seite 9) eine physikalisch sinnvolle Form:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m} \, \mathrm{Im} \left\{ \psi_E^* \frac{d}{dx} \psi_E \right\}$$

$$= \frac{\hbar k_0}{m} \, \mathrm{Im} \left\{ \left(A^* e^{-ik_0 x} + B^* e^{ik_0 x} \right) i \left(A e^{ik_0 x} - B e^{-ik_0 x} \right) \right\}$$

$$= \frac{\hbar k_0}{m} \, \mathrm{Im} \left\{ i \left(\underbrace{|A|^2 - |B|^2}_{\text{reell}} + \underbrace{AB^* e^{2ik_0 x} - A^* B e^{-2ik_0 x}}_{\text{imaginär}} \right) \right\}$$

$$= \underbrace{\frac{\hbar k_0}{m}}_{\text{Geschwindigkeit}} |A|^2 - \frac{\hbar k_0}{m} |B|^2$$

Geschwindigkeit

$\longrightarrow$ Strahl nach rechts

$\longleftarrow$ Strahl nach links

$x > \frac{L}{2}$

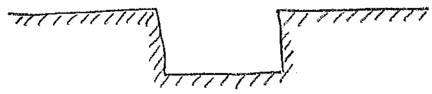
$$\Psi_E'' = -k_0^2 \Psi_E$$

$$\Psi_E = C e^{ik_0 x} + D e^{-ik_0 x}$$

Jetzt stellen wir uns das folgende Experiment vor:

einlaufender Strahl $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ Transmission

Reflexion $\longleftarrow$



D.h., wir verlangen als Randbedingung, dass es auf der rechten Seite keinen linkslaufenden Strahl gibt

$$\Rightarrow \quad \underline{D = 0}.$$

$-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$

$$\Psi_E'' = -k^2 \Psi_E$$

$$\Psi_E = F e^{ikx} + G e^{-ikx}$$

Anschlussbedingungen $\qquad \Psi_E$ & Ψ_E' stetig bei $x = \pm \frac{L}{2}$:

$x = -\frac{L}{2}$:

$$A e^{-\frac{ik_0 L}{2}} + B e^{\frac{ik_0 L}{2}} = F e^{-\frac{ikL}{2}} + G e^{\frac{ikL}{2}} \qquad (a)$$

$$ik_0 \left(A e^{-\frac{ik_0 L}{2}} - B e^{\frac{ik_0 L}{2}} \right) = ik \left(F e^{-\frac{ikL}{2}} - G e^{\frac{ikL}{2}} \right) \qquad (b)$$

$x = \frac{L}{2}$:

$$C e^{\frac{ik_0 L}{2}} = F e^{\frac{ikL}{2}} + G e^{-\frac{ikL}{2}} \qquad (c)$$

$$ik_0 C e^{\frac{ik_0 L}{2}} = ik \left(F e^{\frac{ikL}{2}} - G e^{-\frac{ikL}{2}} \right) \qquad (d)$$

Vier Gleichungen, fünf Koeffizienten $\Rightarrow \exists$ Lösung $\forall k_0$! Also <u>keine Quantisierung</u>! Aber versuchen wir F und G zu eliminieren,

$$ik \cdot (c) + (d) \Rightarrow 2ikF e^{\frac{ikL}{2}} = i(k+k_0) C e^{\frac{ik_0 L}{2}}$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_0}{k}\right) C e^{\frac{i(k_0-k)L}{2}}$$

$$-ik \cdot (c) + d \Rightarrow -2ikG e^{-\frac{ikL}{2}} = i(-k+k_0) C e^{\frac{ik_0 L}{2}}$$

$$\Leftrightarrow G = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_0}{k}\right) C e^{\frac{i(k_0+k)L}{2}}$$

$$k\cdot(a) \Rightarrow \quad k\left(Ae^{-\frac{ik_0L}{2}}+Be^{\frac{ik_0L}{2}}\right) = \frac{C}{2}\left[(k+k_0)e^{i\left(\frac{k_0}{2}-k\right)L}+(k-k_0)e^{i\left(\frac{k_0}{2}+k\right)L}\right] \qquad (e)$$

$$\frac{1}{i}\cdot(b) \Rightarrow \quad k_0\left(Ae^{-\frac{ik_0L}{2}}-Be^{\frac{ik_0L}{2}}\right) = \frac{C}{2}\left[(k+k_0)e^{i\left(\frac{k_0}{2}-k\right)L}-(k-k_0)e^{i\left(\frac{k_0}{2}+k\right)L}\right] \qquad (f)$$

$$\frac{1}{k}(e)+\frac{1}{k_0}(f) \Rightarrow \quad 2Ae^{-\frac{ik_0L}{2}} = \frac{C}{2}\left[\left(2+\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)e^{i\left(\frac{k_0}{2}-k\right)L} + \left(2-\frac{k_0}{k}-\frac{k}{k_0}\right)e^{i\left(\frac{k_0}{2}+k\right)L}\right]$$

$$A = Ce^{ik_0L}\left[\underbrace{\frac{e^{ikL}+e^{-ikL}}{2}}_{\cos kL}+\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)\underbrace{\frac{e^{-ikL}-e^{ikL}}{4}}_{\frac{\sin kL}{2i}}\right]$$

Definitionen:

„Transmissionskoeffizient": $T := \dfrac{|\vec{j}\,(x>\frac{L}{2};\text{ rechts})|}{|\vec{j}\,(x<-\frac{L}{2};\text{ rechts})|} = \dfrac{|C|^2}{|A|^2}$

„Reflexionskoeffizient": $R := \dfrac{|\vec{j}\,(x<-\frac{L}{2};\text{ links})|}{|\vec{j}\,(x<-\frac{L}{2};\text{ rechts})|} = \dfrac{|B|^2}{|A|^2}$.

$$\Rightarrow \quad T^{-1} = \left[\cos kL+\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)\frac{\sin kL}{2i}\right]\left[\cos kL-\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)\frac{\sin kL}{2i}\right]$$

$$= \cos^2 kL+\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)^2\frac{\sin^2 kL}{4} \overset{!}{=} 1+\frac{(k_0^2-k^2)^2}{4k^2k_0^2}\sin^2 kL$$

$$T = \frac{1}{1+\left[\left(\frac{k_0}{k}-\frac{k}{k_0}\right)\frac{\sin kL}{2}\right]^2}; \qquad k_0=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad k=\sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$$

Aufgabe 6.2:

$$R = \frac{\left[\left(\frac{k_0}{k}-\frac{k}{k_0}\right)\frac{\sin kL}{2}\right]^2}{1+\left[\left(\frac{k_0}{k}-\frac{k}{k_0}\right)\frac{\sin kL}{2}\right]^2}.$$

Damit gilt $0\le T\le 1$, $0\le R\le 1$, $T+R=1$!

D.h. die Gesamtwahrscheinlichkeit bleibt erhalten.

Betrachten wir genauer die Energieabhängigkeit des Transmissionskoeffizienten:

$$\left(\frac{k_0}{k}-\frac{k}{k_0}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E+V_0}}-\frac{\sqrt{E+V_0}}{\sqrt{E}}\right)^2 = \frac{V_0^2}{E(E+V_0)}$$

$$\Rightarrow \quad T(E) = \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\sin^2 kL} \qquad \text{mit} \qquad k=\sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$$

Dies ist im Allgemeinen eine wachsende Funktion der Energie, mit $\lim_{E\to\infty} T(E) = 1$. D.h., ein Teilchen mit grosser Energie $E \gg V_0$ läuft einfach durch den Kasten, ohne den überhaupt zu bemerken.

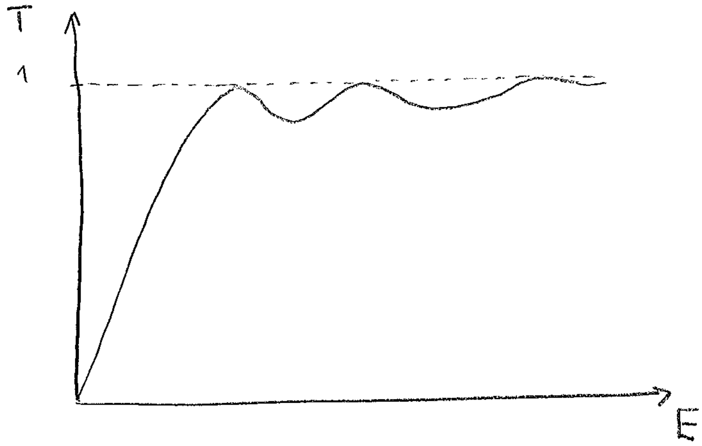
Falls aber $kL = n\pi$, $n=1,2,\ldots$, gilt, ist $T(E)=1$ schon bei einer endlichen Energie! Wir sprechen von einer Resonanz.

Die Resonanzenergien erfüllen

$$\sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}\, L = n\pi \quad \Rightarrow \quad E = -V_0 + \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}.$$

Physikalisch: die bei $x=\frac{L}{2}$ und bei $x=-\frac{L}{2}$ reflektierten Wellen interferieren destruktiv, so dass alles transmittiert wird. Also es gibt doch noch eine "Quantisierung" auch in der Streuung!

Graphisch:



Bemerkung: Streuexperimente der beschriebenen Art sind die Hauptobservablen in der Teilchenphysik.

— · —