## 1.5 Heisenbergsche Unschärferelation [Fliessbach 6-8, Griffiths 1.5-6]

Betrachtet wird ein eindimensionales gaußches Wellenpaket [Aufgabe 2.1]:

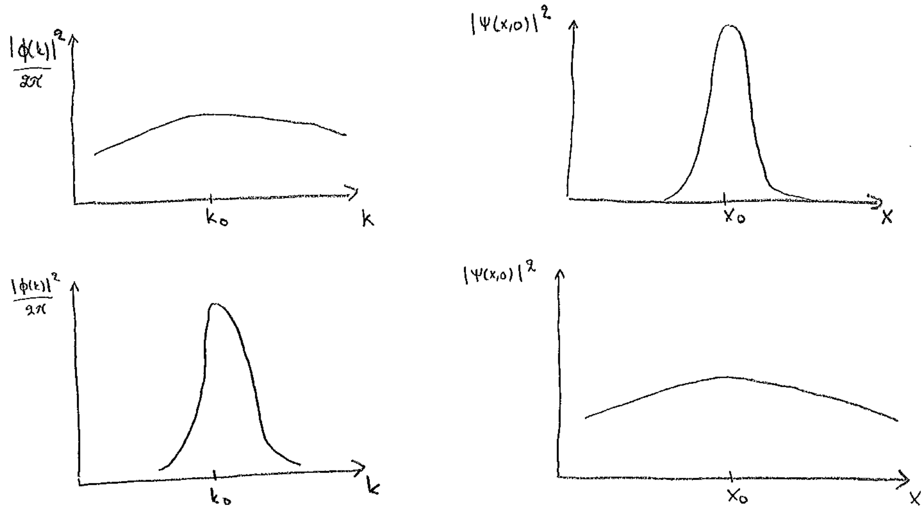
$$\phi(k) := N\, e^{-a^2(k-k_0)^2 - ikx_0}$$

$$|\phi(k)|^2 = |N|^2\, e^{-2a^2(k-k_0)^2}$$

$$|\Psi(x,0)|^2 = \frac{|N|^2}{4\pi a^2}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}$$

$a \ll 1$ :

$a \gg 1$ :




Für die Erwartungswerte (Seite 11) erhält man [Aufgabe 2.2]:

$t = 0$ : $\quad \langle x \rangle = x_0 \qquad (\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = a^2$

$\qquad\quad \langle p \rangle = \hbar k_0 \qquad (\Delta p)^2 = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4a^2}$

$$\Rightarrow \quad \Delta x\, \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad !$$

Für $t > 0$ gilt [Aufgabe 2.2] $\Delta x\, \Delta p > \frac{\hbar}{2}$.

Diese sind Spezialfälle der Heisenbergschen Unschärferelation: für eine beliebige Wellenfunktion und zeitgleiche Varianzen gilt

$$\boxed{\Delta x\, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}.$$

Beweis :

$$i\hbar = [x, \hat{p}] \qquad \text{mit} \quad \hat{p} := -i\hbar \frac{d}{dx} \qquad (\text{Seite } 8)$$

$$\Rightarrow \quad [x - \langle x \rangle, \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle] = (x - \langle x \rangle)(\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) - (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)(x - \langle x \rangle)$$

$$= [x, \hat{p}] - \langle x \rangle \hat{p} - x \langle \hat{p} \rangle + \langle x \rangle \langle \hat{p} \rangle + \hat{p} \langle x \rangle + \langle \hat{p} \rangle x - \langle \hat{p} \rangle \langle x \rangle = [x, \hat{p}] = i\hbar .$$

eine Zahl; keine Funktion

Sei $\Psi(x)$ eine Wellenfunktion $[$entweder $\Psi_E(x)$ oder $\Psi(x,t)]$, normiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi^*(x) \Psi(x) = 1 .$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi^*(x) \; i\hbar \; \Psi(x)$$

$i\hbar = [x - \langle x \rangle, \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi^*(x) \; (x - \langle x \rangle) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle\right) \Psi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle\right) (x - \langle x \rangle) \Psi(x)$$

partielle Integration im zweiten Term

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi^*(x) \; (x - \langle x \rangle) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle\right) \Psi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi(x) \; (x - \langle x \rangle) \left(+i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle\right) \Psi^*(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\hbar}{2} = \mathrm{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi^*(x) \; (x - \langle x \rangle) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle\right) \Psi(x) \right\} .$$

Für eine beliebige komplexe Zahl gilt $(\mathrm{Im}\, z)^2 \leq |z|^2$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi^*(x) \; (x - \langle x \rangle) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle\right) \Psi(x) \right|^2 .$$

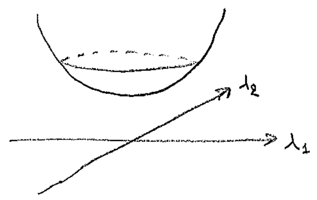
Jetzt bedienen wir uns der Schwarzschen Ungleichung:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx\, u^*(x)\, v(x) \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |u(x)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |v(x)|^2 .$$

Beweis:

$$0 \leq f(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left[u^*(x) - \lambda^* v^*(x)\right]\left[u(x) - \lambda v(x)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ u^* u - \lambda u^* v - \lambda^* v^* u + |\lambda|^2 v^* v \right\} .$$




Seien $U := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, u^* u$, $V := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, v^* v$, $M = M_1 + iM_2 := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, v^* u$

und $\lambda := \lambda_1 + i\lambda_2$

$$(\lambda_1 + i\lambda_2)(M_1 - iM_2) + (\lambda_1 - i\lambda_2)(M_1 + iM_2) = 2\lambda_1 M_1 + 2\lambda_2 M_2$$

$$\Rightarrow \quad f(\lambda) = U - 2\lambda_1 M_1 - 2\lambda_2 M_2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) V$$

$$= \left(\lambda_1 \sqrt{V} - \frac{M_1}{\sqrt{V}}\right)^2 + \left(\lambda_2 \sqrt{V} - \frac{M_2}{\sqrt{V}}\right)^2 + U - \frac{M_1^2 + M_2^2}{V}$$

$$\Rightarrow \quad f(\lambda_{min}) = U - \frac{|M|^2}{V} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad UV \geq |M|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, v^* u}_{M} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, u^* v}_{M^*} \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx\, u^* u \int_{-\infty}^{\infty} dx\, v^* v .$$

$\square$.

Folglich benutzen wir die Schwarzsche Ungleichung mit $\begin{cases} u(x) := \Psi(x)\,(x - \langle x \rangle), \\ v(x) := \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle\right) \Psi(x) . \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x)\, (x - \langle x \rangle)^2\, \Psi(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x) \left(i\hbar \frac{\overleftarrow{d}}{dx} - \langle \hat{p} \rangle\right)\left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle\right) \Psi(x)$$

partielle Integration

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x)\, (x - \langle x \rangle)^2\, \Psi(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - \langle \hat{p} \rangle\right)^2 \Psi(x)$$

$$= (\Delta x)^2 (\Delta p)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta x\, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad !$$

Ein "minimales" Wellenpaket erfülle die Gleichung $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$.

So ein Wellenpaket sollte am nähersten einem klassischen Teilchen ähneln.

Wie sieht es aus?

(a) Seite 18 $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi^*(x)\,(x-\langle x\rangle)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}-\langle\hat p\rangle\right)\psi(x)$ soll rein imaginär sein.

(b) Seite 19 $\Rightarrow$ $f(\lambda_{min}) = 0 \Rightarrow |u(x)-\lambda_{min}v(x)| = 0 \quad \forall\ x$

$\Leftrightarrow \quad u(x) = \lambda_{min}\, v(x)$.

Mit $u(x) = \psi(x)\,(x-\langle x\rangle)$ und $v(x) = \left(-i\hbar\frac{d}{dx}-\langle\hat p\rangle\right)\psi(x)$ erhalten wir:

rein imaginär

$$0 \overset{!}{=} \mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi^*(x)\,(x-\langle x\rangle)^2\,\psi(x)\cdot\frac{1}{\lambda_{min}}\right\} \overset{!}{=} (\Delta x)^2\ \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\lambda_{min}}\right\}.$$

Notation:

$$\lambda_{min} =: \frac{2a^2}{i\hbar}, \quad \text{so dass} \quad \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\lambda_{min}}\right\} = 0.$$

Gleichung (b) mit dieser Notation:

$$\underbrace{\left(-i\hbar\frac{d}{dx}-\langle\hat p\rangle\right)\psi(x)}_{v} = \underbrace{\frac{i\hbar}{2a^2}}_{1/\lambda_{min}}\ \underbrace{(x-\langle x\rangle)\,\psi(x)}_{u}$$

Seien $\langle\hat p\rangle =: \hbar k_0$, $\langle x\rangle =: x_0$

$$\Rightarrow \frac{d\psi(x)}{dx} = \left[-\frac{1}{2a^2}(x-x_0) + ik_0\right]\psi(x)$$

$$= \left\{\frac{d}{dx}\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2} + ik_0x + C\right]\right\}\psi(x)$$

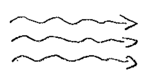
$$\Rightarrow \psi(x) = D\cdot\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2} + ik_0x\right\},$$

$$|\psi(x)|^2 = |D|^2\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right\}.$$

Genau das Beispiel auf Seite 17!

Fazit: Ein Teilchen $\hat{=}$ ein minimales gaußches Wellenpaket, (anstelle einer ebenen Welle wie wir am Anfang dachten).

Aber: eine ebene Welle $\hat{=}$ ein monochromatischer Strahl von Teilchen.



—— · ——