1.3 Wahrscheinlichkeitsinterpretation [Fliessbach 4-5, Griffiths 1.2-4]

Wir definieren

$$\rho(\vec r,t) := |\Psi(\vec r,t)|^2 = \Psi^*(\vec r,t)\,\Psi(\vec r,t) \,,$$

und betrachten

$$\frac{\partial \rho(\vec r,t)}{\partial t} = \frac{\partial \Psi^*(\vec r,t)}{\partial t}\,\Psi(\vec r,t) + \Psi^*(\vec r,t)\,\frac{\partial \Psi(\vec r,t)}{\partial t} \,.$$

Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar\,\frac{\partial \Psi(\vec r,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\vec r)\right)\Psi(\vec r,t) \qquad \Big|\ (\ )^*$$

$$-i\hbar\,\frac{\partial \Psi^*(\vec r,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\vec r)\right)\Psi^*(\vec r,t)$$

Annahme: $V^*(\vec r) = V(\vec r)$!

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho(\vec r,t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left\{\left[\left(\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - V(\vec r)\right)\Psi^*(\vec r,t)\right]\Psi(\vec r,t) + \Psi^*(\vec r,t)\left[\left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\vec r)\right)\Psi(\vec r,t)\right]\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left\{\left[\nabla\cdot\nabla\Psi^*(\vec r,t)\right]\Psi(\vec r,t) - \Psi^*(\vec r,t)\left[\nabla\cdot\nabla\Psi(\vec r,t)\right]\right\}$$

$$\overset{!}{=} \frac{\hbar}{2im}\,\nabla\cdot\left\{\left[\nabla\Psi^*(\vec r,t)\right]\Psi(\vec r,t) - \Psi^*(\vec r,t)\,\nabla\Psi(\vec r,t)\right\}$$

Diese Operationen kürzen sich.

Definition:

$$\vec j(\vec r,t) := \frac{i\hbar}{2m}\left\{\left[\nabla\Psi^*(\vec r,t)\right]\Psi(\vec r,t) - \Psi^*(\vec r,t)\,\nabla\Psi(\vec r,t)\right\}$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left\{\underbrace{\left[\Psi^*(\vec r,t)\,\nabla\Psi(\vec r,t)\right]^*}_{\mathrm{Re}\,-\,i\,\mathrm{Im}} - \underbrace{\Psi^*(\vec r,t)\,\nabla\Psi(\vec r,t)}_{\mathrm{Re}\,+\,i\,\mathrm{Im}}\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left\{\Psi^*(\vec r,t)\,\nabla\Psi(\vec r,t)\right\} \,.$$

Wir finden also eine Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho(\vec r,t)}{\partial t} + \nabla\cdot\vec j(\vec r,t) = 0 \,, \qquad \text{mit } \rho \in \mathbb{R}\,,\ \vec j \in \mathbb{R}^3 .$$

Eine Kontinuitätsgleichung impliziert ein Erhaltungsgesetz:

$$N(t) := \int_G d^3\vec{r}\ \rho(\vec{r},t) .$$

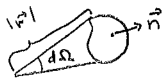
Am Ende, $G \to \mathbb{R}^3$; dies ist möglich, falls $\Psi(\vec{r},t)$ „quadratisch intergrierbar" ist, z.B. $|\Psi(\vec{r},t)|^2 \to 0$ schneller als $\frac{1}{|\vec{r}|^3}$ für $|\vec{r}| \to \infty$.

Jetzt gilt:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \int_G d^3\vec{r}\ \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = \int_G d^3\vec{r}\ \left[-\nabla\cdot\vec{j}(\vec{r},t)\right]$$

$$= - \int_{\partial G} d\vec{S}\cdot\vec{j}(\vec{r},t).$$

Gauß



$$d\vec{S} = |\vec{r}|^2\, d\Omega\ \vec{n}$$

Falls aber $|\Psi(\vec{r},t)|^2 \to 0$ auf der Oberfläche ∂G, dann ist normalerweise* auch $\vec{j}(\vec{r},t)$ verschwindend dort.

$\Rightarrow$ für $G \to \mathbb{R}^3$ gilt $\frac{dN(t)}{dt} = 0$

$\Rightarrow$ N ist eine Erhaltungsgrösse!

Was könnte die physikalische Interpretation von $N(t)$ sein?

* Teilchenzahl? Wie wir auf Seite 7 gesehen haben, gibt es aber Freiheit in der Normierung von $\Psi(\vec{r},t)$. Wir entscheiden jetzt, dass wir ein <u>einziges Teilchen</u> betrachten; wir verlangen also eine <u>Normierungsbedingung</u>

$$N(t) = N(0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}\ |\Psi(\vec{r},t)|^2 \overset{!}{=} 1 .$$

* $\rho(\vec{r},t)$:= die <u>Wahrscheinlichkeitsdichte</u> dafür, dass das Teilchen <u>beim Ort</u> $\vec{r}$ zu finden ist.

---

* Sei $\Psi =: \rho e^{i\phi}$; $|\Psi| = \rho$ $\Rightarrow$ $\Psi^* = \rho e^{-i\phi}$; $\nabla\Psi = (\nabla\rho)e^{i\phi} + i\rho e^{i\phi}\nabla\phi$

$\Psi^*\nabla\Psi = \rho\nabla\rho + i\rho^2\nabla\phi$

$\mathrm{Im}(\Psi^*\nabla\Psi) = \rho^2\nabla\phi = |\Psi|^2\nabla\phi$.

Diese Interpretation führt zur Definition physikalischer Grössen, die in der Quantenmechanik als <u>Erwartungswerte</u> auftauchen.

* Wo findet man das Teilchen am wahrscheinlichsten?

$$\langle \vec{r} \rangle (t) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \; \vec{r} \; \rho(\vec{r},t) \quad = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \; \psi^*(\vec{r},t) \, \vec{r} \, \psi(\vec{r},t) \, .$$

* Was ist die Varianz der Ortsmessungen?

$$|\Delta \vec{r}|^2 := \left\langle |\vec{r} - \langle \vec{r} \rangle|^2 \right\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \; \psi^*(\vec{r},t) \; |\vec{r} - \langle \vec{r} \rangle|^2 \, \psi(\vec{r},t) \, .$$

Für den Impuls benutzen wir das Ergebnis aus Aufgabe 1.4:

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \; \psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \; \tilde{\psi}^*(\vec{k},t)\tilde{\psi}(\vec{k},t) \quad ,$$

wobei

$$\psi(\vec{r},t) =: \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \; \tilde{\psi}(\vec{k},t) \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad \text{(Fourier-Darstellung bzgl. Raumkoordinaten)}$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{|\tilde{\psi}(\vec{k},t)|^2}{(2\pi)^3}$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{p} \rangle (t) := \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \; \tilde{\psi}^*(\vec{k},t) \; \hbar\vec{k} \; \tilde{\psi}(\vec{k},t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \; \psi^*(\vec{r},t) \; (-i\hbar\nabla) \, \psi(\vec{r},t) \, .$$

Aufgabe 1.4

Und letztendlich die Varianz der Impulsmessungen:

$$|\Delta \vec{p}|^2 := \left\langle |\vec{p} - \langle \vec{p} \rangle|^2 \right\rangle$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \; \tilde{\psi}^*(\vec{k},t) \; |\hbar\vec{k} - \langle \vec{p} \rangle|^2 \, \tilde{\psi}(\vec{k},t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \; \psi^*(\vec{r},t) \, |-i\hbar\nabla - \langle \vec{p} \rangle|^2 \, \psi(\vec{r},t) \, .$$

Notabene: $\psi = \psi_1 + i\psi_2 \;\Rightarrow\; |\psi|^2 := \psi_1^2 + \psi_2^2$

$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) \;\Rightarrow\; |\vec{r}|^2 := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \, .$

Bemerkungen zur Wahrscheinlichkeitsinterpretation:

(i) $\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\{\psi^*(\vec{r},t) \nabla \psi(\vec{r},t)\}$

$\Rightarrow$ funktioniert nur falls $\psi \in \mathbb{C}$!

(ii) Seite 7: Wellenfunktionen können linear superponiert werden:

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_1(\vec{r},t) + \psi_2(\vec{r},t)$$

$$\Rightarrow |\psi(\vec{r},t)|^2 = \underbrace{|\psi_1(\vec{r},t)|^2 + |\psi_2(\vec{r},t)|^2}_{\text{eine klassische Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten}} + \underbrace{\psi_1^*(\vec{r},t)\,\psi_2(\vec{r},t) + \psi_2^*(\vec{r},t)\,\psi_1(\vec{r},t)}_{\text{quantenmechanische Interferenzterme}}$$

(iii) philosophische Probleme?

* Kann man mit einer Theorie zufrieden sein, die keine „genaue" Information über ein Teilchen liefert, nur Wahrscheinlichkeiten?

* Dennoch ist die Theorie „kausal": die Zeitentwicklung der Wellenfunktion wird eindeutig von der Schrödinger-Gleichung bestimmt!

$\Rightarrow$ man sollte einfach an keinen klassischen Vorurteilen festhalten, wenn es um sehr mikroskopische Phänomene geht. Mehr darüber später!