

7. Systeme mit Skalenhierarchie

Quantenfeldtheorie hat eigentlich immer unendlich viele "Skalen": Impulsintegrationen laufen von null bis unendlich. Allerdings sind renormierbare Theorien unabhängig von der Physik der grossen Impulse, und könnten z.B. die Eigenschaften einer bestimmten Teilchenart, mit Masse m , beschreiben.

Wir sprechen von einer physikalischen Skalenhierarchie, falls die Theorie mindestens zwei physikalische Skalen hat, z.B. zwei Arten von Teilchen, mit Massen $m_1 \ll m_2$. Das kommt in der Natur sehr häufig vor.

7.1. Physikalische Beispiele

(i) Schwache Zerfälle leichter Hadronen / Leptonen

* Standard Modell:

$$\hat{\mathcal{L}}_I \sim g_w \left\{ \hat{W}_\mu^-(x) \hat{J}_+^M(x) + (\hat{W}_\mu^-(x))^\dagger (\hat{J}_+^M(x))^\dagger \right\};$$

$$\hat{J}_+^M(x) \sim \sum_{D_L} \hat{D}_L(x) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \hat{D}_L(x) \quad \text{"Duplett"}$$

$$\langle 0 | T \{ \hat{W}_\mu^-(x) [\hat{W}_\nu^-(y)]^\dagger \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x-y)} \frac{i \eta_{\mu\nu}}{p^2 - m_W^2 + i\epsilon} \equiv P_{\mu\nu}(x-y)$$

* Seite 19:

$$S_{fi} = \langle f | \hat{S} | i \rangle \sim \langle f | \frac{g_w^2}{2} T \left\{ \int d^4 x d^4 y \hat{J}_+^M(x) \cdot P_{\mu\nu}(x-y) [\hat{J}_+^M(y)]^\dagger \right\} | i \rangle$$

erste nicht-triviale Ordnung in g_w ; Wick-Theorem für \hat{W}_μ^-

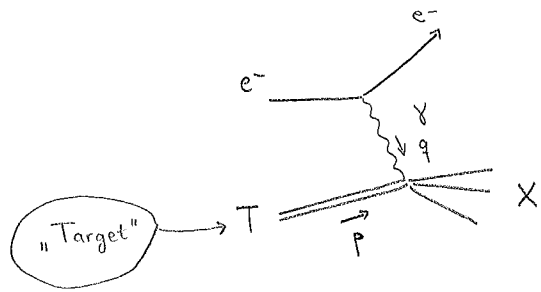
$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_f - \sum p_i) \langle f | \frac{g_w^2}{2} \int d^4 x P_{\mu\nu}(x) T \left\{ \hat{J}_+^M(x) [\hat{J}_+^M(0)]^\dagger \right\} | i \rangle$$

Physik der kleinen Abstände / grossen Impulse:
 $x \sim p^{-1} \sim m_W^{-1}$; $m_W \approx 80 \text{ GeV}$

ein "Kompositoperator"

Anfangs- und Endzustand sowie \hat{J}_+^M enthalten nur "leichte" Teilchen, z.B. Kaonen und Pionen mit Massen unter 1 GeV.

(ii) Streuung durch Photon austausch



$$\hat{\mathcal{L}}_I \sim g_{em} \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{J}^\mu(x) \} ;$$

$$\hat{J}_\mu(x) = \sum_i Q_i \hat{\Psi}(x) \gamma_\mu \hat{\Psi}(x) ; \quad Q_i = \text{Ladung in Einheiten von } e = g_{em} .$$

Betrachten wir den Teil $S_{fi} = \langle X | \otimes \langle 0 | \hat{S} | \gamma; q \rangle \otimes | T; p \rangle$
zur ersten Ordnung in g_{em} :

$$S_{fi} = i g_{em} \int d^4x \langle X | \hat{J}^\mu(x) | T; p \rangle \langle 0 | \hat{A}_\mu(x) | \gamma; q \rangle$$

Seite 93: $\propto \epsilon_\mu^{(\lambda)} e^{-iq \cdot x}$
Polarisationszustand λ

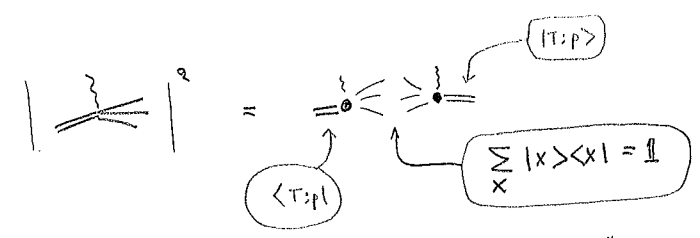
Für Physik brauchen wir

$$\sum_X \sum_\lambda |S_{fi}|^2 = \sum_X \sum_\lambda S_{fi}^* S_{fi}$$

$$\sim \sum_X g_{em}^2 \int d^4x i q \cdot x \int d^4y e^{-iq \cdot y} \langle T; p | [\hat{J}^\mu(x)]^+ | X \rangle \langle X | \hat{J}_\mu(y) | T; p \rangle$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\dots) \cdot g_{em}^2 \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T; p | [\hat{J}^\mu(x)]^+ \hat{J}_\mu(0) | T; p \rangle .$$

Graphisch:



Notabene: Wir haben jetzt eine "Wightman-Funktion" [Seite 13] statt $T \{ [\hat{J}^\mu(x)]^+ [\hat{J}_\mu(0)] \}$! Es gibt aber eine Beziehung,

so dass wir am Ende zeitgeordnete Erwartungswerte betrachten können.

Wo ist die Skalenhierarchie jetzt? Zum Beispiel:

(i) "Tiefinelastische Streuung" : $T \equiv \text{Proton} ; p \sim m_p \sim 1 \text{ GeV} ;$
 $-q^2 \equiv Q^2 \gg (16 \text{ GeV})^2$
"euklidisches" virtuales Photon

(ii) "Chirale Dynamik" : $T \equiv \text{Goldstone-Boson} ; p \sim m_\pi \sim 100 \text{ MeV}$
Die grosse Skala ist jetzt eine "innere" Skala, "QCD-Skala", $\sim 1 \text{ GeV}$.

7.2. Potenzzählung

Wir haben gesehen, dass wir im Allgemeinen (eichinvariante) Kompositoperatoren betrachten müssen, sowie deren Korrelationsfunktionen bei möglicherweise sehr kleinen Abständen.

Um das zu schaffen, müssen wir etwas mehr über Renormierung verstehen.

Die Existenz der Divergenzen kann in der Regel durch Potenzzählung bzw. dimensionale Analyse untersucht werden.

Die Prinzipien:

- * Wir benutzen "natürliche Einheiten": $[p] = [m] = \text{GeV}$; $[x] = [t] = \text{GeV}^{-1}$
Die Wirkung ist eine reine Nummer: $[S_E] = \text{GeV}^0$
- * Teilchenmassen spielen keine Rolle für die Renormierung; die Divergenzen entstehen von grossen Impulsen $p \gg m$. Also können wir $m \rightarrow 0$ setzen.
- * Wir müssen die Dimensionen der Felder sowie der Kopplungskonstanten bestimmen! Zum Beispiel: (Seite 39)

$$S_E = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \phi(x) [-\partial_\mu^2 + m^2] \phi(x) + \frac{1}{3!} g \phi^3(x) + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4(x) \right\}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow [S_E] &= [dx]^4 [\phi]^2 [dx]^2 \Rightarrow [\phi] = \text{GeV} \\ [g\phi^3] &= \text{GeV}^4 \Rightarrow [g] = \text{GeV} \\ [\lambda\phi^4] &= \text{GeV}^4 \Rightarrow [\lambda] = 1 \end{aligned}$$

- * Neben der Dimensionen spielen auch Symmetrien eine wichtige Rolle:
Ward / BRST $\Rightarrow \Gamma$ hat dieselben Symmetrien als S_E
 \Rightarrow Divergenzen respektieren die Symmetrien von S_E .

\Rightarrow \square Divergenzen können nur als Koeffizienten mit einer nicht-negativen Dimension auftreten! \square

Zum Verständnis ein Beispiel:

könnte es eine Divergenz der Art $\delta\Gamma = \int d^4x \cdot c \cdot \phi^6(x)$ geben?
 $[c] = \text{GeV}^{-2}$; c kann aber Kopplungskonstanten enthalten;
 falls $c = \lambda c'$, $[c'] = \text{GeV}^{-2}$; falls $c = g c'$, $[c'] = \frac{[c]}{g} = \text{GeV}^{-3}$.
 Also gilt für den Teil c' ohne Kopplungskonstanten:
 $[c'] = \text{GeV}^{-n}$, $n \geq 2$. Aber dann:

$$c' \sim \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^4+n} = \text{konvergent für } p \rightarrow \infty!$$

Konsequenzen:

(i) Gibt es eine Kopplungskonstante mit einer negativen Dimension in \mathcal{L}_E , z.B. $\frac{1}{5!} \gamma \phi^5$; $[\gamma] = \text{GeV}^{-1}$, dann ist die Theorie nicht renormierbar: für das Beispiel auf Seite 103,

$$C = \gamma^4 c' \Rightarrow [c'] = \frac{[c]}{[\gamma]^4} = \text{GeV}^2$$

$$\Rightarrow c' \sim \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} = \text{divergent für } p \rightarrow \infty!$$

Nur Theorien, deren Kopplungskonstanten positive Dimensionen haben, können unabhängig von großen Impulsen, und damit "komplette Theorien" sein.

(ii) Betrachten wir einen Kompositoperator als Limes:

$$G_R^{(2)} = \langle \phi_R(x) \phi_R(y) \rangle \sim \frac{1}{|x-y|^2} \xrightarrow{x \rightarrow y} \text{divergent!}$$

(renormiert) (dimensional)

Oder direkt: $[\phi^2(x)] = \text{GeV}^2 \sim \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2}$

\Rightarrow Kompositoperatoren verlangen Renormierung, selbst wenn die "elementaren Felder" ϕ schon renormiert sind!

(iii) Seien weiterhin $O_R(x) = [\phi^2(x)]_R$ renormierte Kompositoperatoren.

Dann gilt:

$$\langle O_R(x) O_R(y) \rangle \sim \text{graphisch} \sim \frac{1}{|x-y|^4}$$

(dimensional)

$$\Rightarrow \int d^4 x \langle O_R(x) O_R(0) \rangle e^{iq \cdot x} \sim \int d^4 x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{divergent!}$$

\Rightarrow Korrelationsfunktionen von Kompositoperatoren sind bei kleinen Abständen auf jeden Fall singular, möglicherweise sogar nicht integrierbar.