6.3 BRST - Invarianz

[C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, Commun. Math. Phys. 42 (1975) 127 ;
I.V. Tyutin, unveröffentlicht]

Die vorigen Kapitel : $\exists$ globale Symmetrie $\Rightarrow \exists$ Ward-Identitäten .

Auf der anderen Seite: eine lokale Symmetrie kann nur zusammen mit Eichfeldern existieren, aber die Quantisierung von Eichfeldern (zumindest im Kontinuumsformalismus) verlangt, dass die Symmetrie durch eine Eichbedingung gebrochen wird.

Fragen: * Die Eichbedingung kann beliebig gewählt werden — Physik muss unabhängig von der Wahl sein. Also gibt es immer noch eine „Invarianz" — wie kann diese Tatsache mathemetisch ausgedrückt werden ?

* Gibt es ein Analogon der Ward-Identitäten für lokale Symmetrien ?

Antworten: * Man kann in der Tat immer noch eine bestimmte, wenn auch komplizierte und nichtlineare Substitution der Integrationsvariablen finden, die zu einer Art von Ward-Identitäten, genannt Slavnov-Taylor-Identitäten, führt.

[A.A. Slavnov, Theor. Math. Phys. 10 (1972) 99 ;
J.C. Taylor, Nucl. Phys. B 33 (1971) 436] .

* Die BRST - Transformation :
eine globale Invarianz ;
viel einfacher als Slavnov-Taylor ;
führt zu denselben Identitäten ;
aber verlangt einen Grassmann-artigen Transformationsparameter $\delta\omega$!

Die BRST-Invarianz gilt als eine sehr schöne und tiefe Entdeckung, und hat viele elegante mathematische Eigenschaften. Hier berühren wir natürlich nur die Oberfläche.

Anfangspunkt (Seite 79):

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi} G^a G^a + \bar{c}^a \left(\frac{\delta G^a}{\delta \theta^b} \right) c^b ,$$

wo die Eichtransformation operiert als (Seite 79, 82):

$$\frac{\delta A^a_\mu}{\delta \theta^b} = \mathcal{D}^{ab}_\mu \qquad , \quad \mathcal{D}^{ab}_\mu \equiv \partial_\mu \delta^{ab} + g f^{acb} A^c_\mu \, .$$

Sei jetzt $\delta\bar{\omega}$ ein „infinitesimaler" ortsunabhängiger Grassmann-Parameter ; $(\delta\bar{\omega})^2 = 0$.

* Transformation 1/3 : $\boxed{\delta A^a_\mu \equiv \mathcal{D}^{ab}_\mu \, c^b \delta\bar{\omega}}$.

Wie eine Eichtransformation mit einem bosonischen Parameter $c^b \delta\bar{\omega}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}$ bleibt invariant ! Der zweite und dritte Term sind aber nicht invariant.

$$\delta\left(\frac{1}{2\xi} G^a G^a \right) = \frac{1}{\xi} G^a \frac{\delta G^a}{\delta A^b_\mu} \delta A^b_\mu = \frac{1}{\xi} G^a \frac{\delta G^a}{\delta A^b_\mu} \mathcal{D}^{bc}_\mu \, c^c \delta\bar{\omega}$$

$$= \frac{1}{\xi} G^a \frac{\delta G^a}{\delta A^b_\mu} \cdot \frac{\delta A^b_\mu}{\delta \theta^c} c^c \delta\bar{\omega} \overset{!}{=} - \frac{1}{\xi} G^a \frac{\delta G^a}{\delta \theta^b} \delta\bar{\omega} \, c^b \, .$$

Wir wählen also

* Transformation 2/3 : $\boxed{\delta \bar{c}^a \equiv + \frac{1}{\xi} G^a \delta\bar{\omega}}$.

Damit kürzt sich $\delta\left(\frac{1}{2\xi} G^a G^a\right)$ und übrig bleibt nur $\bar{c}^a \delta \left\{ \frac{\delta G^a}{\delta \theta^b} c^b \right\}$. Hier:

$$\delta \left\{ \frac{\delta G^a}{\delta \theta^c} c^c \right\} = \delta \left\{ \frac{\delta G^a}{\delta A^b_\mu} \mathcal{D}^{bc}_\mu c^c \right\}$$

$$= \frac{\delta^2 G^a}{\delta A^b_\mu \delta A^e_\nu} \cdot \underbrace{\mathcal{D}^{ed}_\nu c^d \delta\bar{\omega}}_{\delta A^e_\nu} \mathcal{D}^{bc}_\mu c^c + \frac{\delta G^a}{\delta A^b_\mu} \delta \left\{ \mathcal{D}^{bc}_\mu c^c \right\}$$

$$- \underbrace{\frac{\delta^2 G^a}{\delta A^b_\mu \delta A^e_\nu}}_{\substack{\text{symmetrisch} \\ (b \leftrightarrow e,\ \mu \leftrightarrow \nu)}} \underbrace{\mathcal{D}^{ed}_\nu c^d \mathcal{D}^{bc}_\mu c^c}_{\substack{\text{antisymmetrisch} \\ (b \leftrightarrow e,\ \mu \leftrightarrow \nu)}} \delta\bar{\omega} = 0$$

$$- \frac{\delta \mathcal{D}^{bc}_\mu}{\delta A^d_\nu} \cdot \mathcal{D}^{de}_\nu c^e c^c \delta\bar{\omega} + \mathcal{D}^{bc}_\mu \delta c^c$$

Antisymmetrisierung

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta \mathcal{D}^{be}_\mu}{\delta A^d_\nu} \mathcal{D}^{dc}_\nu - \frac{\delta \mathcal{D}^{bc}_\mu}{\delta A^d_\nu} \mathcal{D}^{de}_\nu \right\} c^e c^c \delta\bar{\omega} + \mathcal{D}^{ba}_\mu \delta c^a$$

Aufgabe 12.1: $\left\{ \quad \text{—''—} \quad \right\} = g f^{cea} \mathcal{D}^{ba}_\mu$

Diese Veränderung müssen wir mit δc^a kürzen, d.h.:

* Transformation 3/3 : $\boxed{\delta c^a} \equiv - \frac{1}{2} g f^{cea} c^e c^c \delta\bar{\omega} = \boxed{+ \frac{g}{2} f^{abc} c^b c^c \delta\bar{\omega}}$.

$\Rightarrow$ Die Theorie hat tatsächlich eine globale Invarianz !

Führen wir jetzt einen Trick ein: weil $\exp\left(-\frac{1}{2\xi}G^2\right) = C\cdot\int_{-\infty}^{\infty} dB \exp\left\{-\left[\frac{1}{2}\xi B^2 + iBG\right]\right\}$,
könnten wir auch die folgende Theorie betrachten:

$$\mathcal{L}'_E \equiv \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\xi B^a B^a + iB^a G^a + \bar{c}^a\left(\frac{\delta G^a}{\delta\theta^b}\right)c^b .$$

Wir schreiben jetzt für alle Felder $\phi \in \{A^a_\mu, \bar{c}^a, c^a, B^a\}$: $\delta\phi \equiv \Delta\phi\cdot\delta\bar{\omega}$,
wo Δ der „BRST-Operator" ist:

$$\Delta\{A^a_\mu, \bar{c}^a, c^a, B^a\} \equiv \left\{\mathcal{D}^{ab}_\mu c^b,\ iB^a,\ \frac{g}{2}f^{abc}c^b c^c,\ 0\right\}.$$

Dann gilt:

(a) $\Delta\mathcal{L}'_E = 0$ [Beweis wie früher]

(b) $\Delta^2\phi = 0$! [$\Delta(\mathcal{D}^{ab}_\mu c^b) = 0$: der dritte Teil auf Seite 98.
$\Delta(iB^a) = 0$: Definition.
$\Delta(f^{abc}c^b c^c) = 0$: Definition + Jacobi-Identität. (Aufgabe 12.2)
$\Delta(0) = 0$: trivial.]

Ein Operator mit der Eigenschaft $\Delta^2 = 0$ wird „nilpotent" genannt.

Im Operatorformalismus erlaubt ein nilpotenter Operator drei Arten von Zuständen:

$|\Psi_1\rangle \equiv$ Zustände mit $\Delta|\Psi_1\rangle \neq 0$.

$|\Psi_2\rangle \equiv$ Zustände der Form $\Delta|\Psi_1\rangle$.
Wir bemerken, dass gilt $\Delta|\Psi_2\rangle = 0$.

$|\Psi_0\rangle \equiv$ Zustände mit $\Delta|\Psi_0\rangle = 0$, die aber nicht von der Form $\Delta|\Psi_1\rangle$ sind.

[Formell sind diese Strukturen der „de Rahm - Kohomologie" der Differentialgeometrie äquivalent.]

Physik [ohne Beweis]:

$\Delta \;\hat{=}\;$ Transformation der Eichbedingung

$|\Psi_0\rangle \;\hat{=}\;$ physikalische Zustände : eichunabhängig $\left(e^{\delta\bar{\omega}\Delta}|\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle\right)$
aber nicht Transformationen anderen Zustände.

$|\Psi_1\rangle \;\hat{=}\;$ nicht physikalische Zustände, weil nicht eichunabhängig.

$|\Psi_2\rangle \;\hat{=}\;$ nichtphysikalische Zustände, weil Transformationen anderer Zustände.

S-Matrix soll nur für $|\Psi_0\rangle$ definiert werden!

— ° —

Bedeutung

* Die Theorie besitzt also eine globale Symmetrie.

* Falls die Fermion-Darstellungen bzw. die elektrischen Ladungen „gesund" sind, ist diese Symmetrie nicht-anomal. [vgl. Seite 96]

* Die Symmetrie führt zu Ward-Identitäten [vgl. Seite 89].

* Es gibt Ward-Identitäten auch für die generierenden Funktionale [vgl. Seite 92 und Aufgabe 10.2].

* Die Ward-Identitäten für die generierenden Funktionale sind „Differentialgleichungen", und können unter bestimmten Umständen gelöst werden.

  Insbesondere: Divergenzen können nur in Koeffizienten von Polynomen niedriger Ordnung auftauchen [vgl. Seite 42]. Die Lösung für diesen Teil verrät, ob alle Divergenzen in Z-Faktoren versteckt werden können, d.h., ob die Theorie renormierbar ist. QCD: ja!

* Es gilt auch als möglich zu zeigen, dass S-Matrix-Elemente für $|\Psi_0\rangle$-artige Zustände, sowie Green-Funktionen, die mit eichinvarianten Operatoren definiert worden sind, unabhängig von ξ bzw. von der Eichfunktion G^a sind.

Literatur:
- C. Itzykson, J.B. Zuber, Quantum Field Theory, Kapitel 12-4.
- J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Kapitel 21.