6.2 Anomalien

Wir haben gesehen, dass sich klassische Erhaltungsgesetze als Ward-Identitäten für Erwartungswerte in der Quantenfeldtheorie wiederfinden.

Aber nicht immer! Zwei Dinge könnten schief gehen:

(a) Die Definierung einer Quantenfeldtheorie benötigt eine Regularisierung. Es kann aber sein, dass durch die Regularisierung eine klassische Symmetrie gebrochen wird (Seite 64): Zum Beispiel, in dimensionaler Regularisierung

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad \mu \le 3 \quad ; \quad [\gamma_5, \gamma_\mu] = 0, \quad \mu > 3 .$$

Damit ist die Axialtransformation auf Seite 91 nicht mehr eine exakte Symmetrie! Am Ende schicken wir natürlich $\varepsilon \to 0$, aber ist es sicher, dass es keine $\frac{1}{\varepsilon}$ – Effekte gibt? $\left(\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1 !\right)$

(b) Die klassischen Symmetrien verlangen $S_E[\phi'] = S_E[\phi]$; für die Ward-Identitäten braucht man auch $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$ (Seite 89)! Ist es unbedingt so?

[K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett 42 (1979) 1195]

Die allgemeine Philosophie:

Man sollte, nach Regularisierung, die Symmetrietransformationen so definieren, dass $S_E[\phi'] = S_E[\phi]$ tatsächlich gilt. Dann müssen wir noch $\mathcal{D}\phi' / \mathcal{D}\phi$ bestimmen!

Wir betrachten im Folgenden genauer die Axialtransformation, und schreiben: (Seite 79)

$$\langle \cdots \rangle = \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\bar{c}^a \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \, (\cdots) \exp\left\{-\int d^4x \left[\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \bar{\psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi + \frac{1}{2\xi} G^a G^a + \bar{c}^a \left(\frac{\delta G^a}{\delta \theta^b}\right) c^b \right]\right\}$$

$$= \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\bar{c}^a \mathcal{D}c^a \exp\left\{-\int d^4x \left[\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi} G^a G^a + \bar{c}^a \left(\frac{\delta G^a}{\delta \theta^b}\right) c^b \right]\right\} \cdot \underbrace{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \, (\cdots) \exp\left\{-\int d^4x \, \bar{\psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi\right\}}$$

Ein fermionisches Pfadintegral im „Eichfeldhintergrund" $\equiv \langle \cdots \rangle_{A^a_\mu}$.

Seite 91: der Massenterm ist sowieso nicht invariant in Axialtransformationen; betrachten wir also den Limes $m \to 0$.

Seien: $\delta_A^a \Psi \equiv i F^a \gamma_5 \Psi \, \delta\omega_A$; $\delta_A^a \bar{\Psi} \equiv i \bar{\Psi} F^a \hat{\gamma}_5 \, \delta\omega_A$.

Invarianz: $S_E = \int d^{4-2\epsilon}x \, \bar{\Psi} \, [\gamma_\mu D_\mu] \, \Psi$; $\gamma_\mu D_\mu \equiv \not{D}$

$$\delta_A^a S_E = \int d^{4-2\epsilon}x \, i \, \delta\omega_A \left\{ \bar{\Psi} F^a \hat{\gamma}_5 \not{D} \Psi + \bar{\Psi} F^a \not{D} \gamma_5 \Psi \right\} \equiv 0 .$$

Formale Lösung: $\hat{\gamma}_5 \equiv - \not{D} \gamma_5 \not{D}^{-1}$!

(Für $d=4$ ist $\not{D}\gamma_5 = -\gamma_5 \not{D}$ und $\hat{\gamma}_5 = \gamma_5$, wie auf Seite 91.)

Ward-Identität:

$$\int \mathcal{D}\bar{\Psi}' \mathcal{D}\Psi' \exp\left(-S_E[\bar{\Psi}', \Psi']\right) = \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \exp\left(-S_E[\bar{\Psi}, \Psi]\right) ;$$

mit $\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} + i \bar{\Psi} F^a \hat{\gamma}_5 \, \delta\omega_A(x)$, $\Psi' = \Psi + i F^a \gamma_5 \Psi \, \delta\omega_A(x)$.

Aufgabe 11.1: formal gilt

$$\mathcal{D}\bar{\Psi}' \mathcal{D}\Psi' = \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \left\{ 1 - i \int d^4x \; \mathrm{Sp}\left[F^a \hat{\gamma}_5(x,x) + F^a \gamma_5 \right] \delta\omega_A(x) \right\} .$$

Bemerkungen:

(a) Für „nicht-singulette" Transformationen, wie auf Seite 91, gilt $\mathrm{Sp}[F^a] = 0 \Rightarrow$ keine Anomalien!
Im Folgenden also $F^a \to 1$, wie auf Seite 90.

(b) $\mathrm{Sp}[\gamma_5] = 0$! (Aufgabe 3.2)

(c) Für $\delta\omega_A(x) \to$ konstant: ist nicht

$$\int d^4x \; \mathrm{Sp}[\hat{\gamma}_5(x,x)] = -\int d^4x \; \mathrm{Sp}[\not{D} \gamma_5 \not{D}^{-1}] = -\int d^4x \; \mathrm{Sp}[\gamma_5 \not{D}^{-1} \not{D}] = 0 \, ?$$

Ja! Aber $\not{D}^{-1}$ braucht nicht zu existieren, falls $\not{D}$ Eigenwerte gleich null hat!

Konsequenzen: Es ist schon möglich, dass $\left\langle i \frac{\delta S_E}{\delta\omega_A(x)} \right\rangle_{A_\mu^a} = \mathcal{F}(A_\mu^a(x)) \neq 0$, aber $\mathcal{F}(A_\mu^a(x)) \equiv \mathrm{Sp}[\hat{\gamma}_5(x,x)]$ muss sonderbare Eigenschaften besitzen:

(i) eichinvariant als Funktional der Eichfelder.

(ii) $\int d^4x \, \mathcal{F} \neq 0$ nur für Eichfeldkonfigurationen $A_\mu^a(x)$ wobei die Gleichung $\not{D}\Psi(x) = 0$ mindestens eine nicht-triviale Lösung hat.

(iii) endliche Transformationen: $\Psi' = e^{i\omega_A \gamma_5} \Psi$.
Für $\omega_A = n \cdot \pi$ ist $\Psi' = (-1)^n \Psi$ [Aufgabe 11.2]
$\Rightarrow$ Sicher keine anomale Transformation!
Also erwarten wir $\exp\left(-in\pi \int d^4x \; \mathrm{Sp}[\hat{\gamma}_5(x,x)]\right) = 1$
$\Rightarrow \int d^4x \, \mathcal{F} \equiv$ eine gerade ganze Zahl !?

Zwischenbilanz

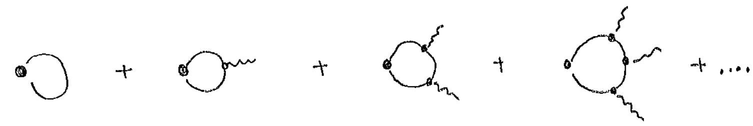
Seite 91 + Seite 94 $\Rightarrow$ $$\left\langle \partial_\mu [\bar\Psi \gamma_\mu \gamma_5 \Psi] \right\rangle_{A^a_\mu} = \left\langle 2m \bar\Psi \gamma_5 \Psi \right\rangle_{A^a_\mu} + \mathcal{F}(A^a_\mu(x)) \,, \qquad (*)$$

wobei $\mathcal{F}$ die Eigenschaften (i)-(iii) auf Seite 91 erfüllen muss.

Bestimmung von $\mathcal{F}(A^a_\mu(x))$

Wir könnten jetzt mit $\mathrm{Sp}[\hat\gamma_5(x,x)]$ weiter gehen, aber wir können auch $(*)$ direkt mittels Störungstheorie betrachten! Für $m=0$:

$$\left\langle \partial_\mu [\bar\Psi(x) \gamma_\mu \gamma_5 \Psi(x)] \right\rangle_{A^a_\mu} = \int_{P,Q} e^{i(P-Q)\cdot x} \int \mathcal{D}\bar\Psi \mathcal{D}\Psi \; \mathrm{Sp}\left\{ -i(\not P - \not Q)\gamma_5 \tilde\Psi(P) \tilde{\bar\Psi}(Q) \right\} e^{-\int d^4x\, \bar\Psi \gamma_\mu D_\mu \Psi}$$

$=$  $+ \dots$

Die ersten Berechnungen: S. Adler, Phys. Rev. 177 (1969) 2426;
J.S. Bell, R. Jackiw, Nuov. Cim. A 60 (1969) 47.

Wirklich wohldefiniert ist die Berechnung nur in Gitterregularisierung:
P. Hasenfratz, V. Laliena, F. Niedermayer, Phys. Lett. B 427 (1998) 125.

Das Ergebnis:
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{F}(A^a_\mu(x)) = N_f \cdot \frac{g^2}{32\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\rho\sigma} \,.$$

Wie erfüllt dieses Ergebnis unsere Bedingungen?

* Aufgabe 6.1 $\Rightarrow$ (i) ist OK, und auch ein Teil von (ii): unter „normalen Bedingungen" gilt $\int d^4x\, \mathcal{F} = 0$.

* M. Atiyah, I.M. Singer, Ann. Math. 93 (1971) 139 $\Rightarrow$

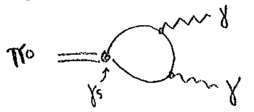
  $\int d^4x \, \frac{g^2}{32\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\rho\sigma}$ ist eine „topologische Invariante", mit dem Wert $2(n_- - n_+)$, wo $n_- + n_+$ die Anzahl der Eigenfunktionen von $\not D$ mit Eigenwert gleich null ist; unter diesen genügen n_- der Gleichung $\gamma_5 \Psi = -\Psi$ und n_+ der Gleichung $\gamma_5 \Psi = +\Psi$.

  $\Rightarrow$ (ii) und (iii) sind auch in Ordnung.

———— o ————

Physikalische Konsequenzen

- Der berühmte Zerfall $\pi^0 \to \gamma\gamma$ [99% der Pionen zerfallen auf diese Weise] passiert tatsächlich wegen des anomalen Diagrammes



[J. Steinberger, Phys. Rev. 76 (1949) 1180].

- Die nicht-singulette $F^a \neq \mathbb{1}$ Axialsymmetrie wird durch QCD-Dynamik „spontan gebrochen". Als Folge gibt es $N_f^2 - 1 = 8$ „Goldstone-Bosonen", d.h. recht leichte Mesonen. Diese werden in der Natur tatsächlich beobachtet [„Der Achtfache Weg"; $\pi^0, \pi^\pm, \eta, K^0, \bar{K}^0, K^\pm$].

  Warum passiert dasselbe nicht für die singulette $\boxed{F^a \equiv \mathbb{1}}$ Axialsymmetrie? Wegen der Anomalie! Es gibt keine richtige Axialsymmetrie in der quantisierten Theorie, und das entsprechende Meson, η', ist schwerer.

  [E. Witten, Nucl. Phys. B 156 (1979) 269; G. Veneziano, Nucl. Phys. B 159 (1979) 213].

- In der Störungstheorie, und in allen bisherigen Experimenten, bleiben die Baryonenzahl und die Leptonenzahl erhalten. Aber die Anomalie sagt vorher, dass es (wenn auch nur extrem selten) Reaktionen gibt, wo diese Zahlen verletzt werden!

  [G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 8].

- Bislang haben wir globale Axialtransformationen betrachtet. Aber es gibt auch Theorien wo γ_5 in Zusammenhang mit einer lokalen Eichsymmetrie auftritt, besonders das Weinberg-Salam-Modell für die schwachen Wechselwirkungen. Es wird geglaubt, dass in solchen Fällen keine Anomalien erlaubt werden können. [Andernfalls wären die S-Matrix-Elemente abhängig von ξ usw.] Diese Tatsache kann erreicht werden, falls die elektrischen Ladungen der Teilchen bestimmte Beziehungen erfüllen, z.B. $Q_\nu + Q_{e^-} + N_c \cdot Q_u + N_c \cdot Q_d = 0$!

- Usw.

— o —