6. Symmetrien

In der klassischen Feldtheorie sagt das Noether-Theorem, dass eine Symmetrie ein Erhaltungsgesetz impliziert [Seite 4]. Betrachten wir insbesondere innere Symmetrien,

$$\phi^a(x) \to \phi^{a\prime}(x) = \phi^a(x) + \delta\phi^a(x)$$
$$\delta\phi^a(x) \equiv \Phi^a_i(x)\, \delta\omega^i ,$$

dann gilt $\partial_\mu j^\mu_i = 0$, mit $j^\mu_i \equiv \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\right] \Phi^a_i$.

Zur Erinnerung:

$$\frac{\partial S_M}{\partial \omega^i} = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \frac{\partial \phi^a}{\partial \omega^i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \frac{\partial(\partial_\mu \phi^a)}{\partial \omega^i} \right\}$$
$$= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \frac{\partial \phi^a}{\partial \omega^i} + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \frac{\partial \phi^a}{\partial \omega^i} \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\right] \frac{\partial \phi^a}{\partial \omega^i} \right\}$$
$$= \int d^4x \left\{ \underbrace{\partial_\mu j^\mu_i}_{\text{Verschwindet wegen Noether-Theorem } \forall i} + \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \right) \right]}_{\text{Verschwindet wegen Euler-Lagrange bzw. } \delta S_M / \delta\phi^a = 0} \Phi^a_i \right\} = 0 .$$

Frage: Was ist die Verallgemeinerung des Noether-Theorems zur Quantenfeldtheorie?

6.1. Ward-Identitäten [auch Ward-Takahashi, „WT", genannt]

Wir betrachten Schwinger-Dyson-Gleichungen [Seite 37] bzw. Substitutionen der Pfadintegrationsvariablen am Punkt x in Richtung ω^i.

$$\phi^a \to \phi^{a\prime} = \phi^a + \delta\phi^a \quad ; \quad \delta\phi^a = \Phi^a_i(x)\, \delta\omega^i(x)$$

Nehme an: $\mathcal{D}\phi^a = \mathcal{D}\phi^{a\prime}$

Observable: $O_y[\phi^a]$.

$$\Rightarrow \int \mathcal{D}\phi^{a\prime}\, O_y[\phi^{a\prime}] \exp\left(-S_E[\phi^{a\prime}]\right) = \int \mathcal{D}\phi^a\, O_y[\phi^a] \exp\left(-S_E[\phi^a]\right)$$

$$\Rightarrow \int \mathcal{D}\phi^a \left\{ \frac{\delta O_y[\phi^a]}{\delta \omega^i(x)} - \frac{\delta S_E[\phi^a]}{\delta \omega^i(x)} O_y[\phi^a] \right\} \exp\left(-S_E[\phi^a]\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{\delta}{\delta \omega^i(x)} O_y \right\rangle = \left\langle \left[\frac{\delta}{\delta \omega^i(x)} S_E\right] O_y \right\rangle \qquad (*)$$

Beispiele

Betrachten wir $\mathcal{L}_E = \bar\Psi\,[\gamma_\mu D_\mu + m\,]\,\Psi$. (Wir sind also wieder euklidisch.)

Diese Theorie hat eine globale bzw. ortsunabhängige Symmetrie:

$$\Psi \to \Psi' = e^{i\omega_v}\Psi$$
$$\bar\Psi \to \bar\Psi' = \bar\Psi\, e^{-i\omega_v} \quad , \ \omega_v \in \mathbb{R}.$$

D.h.,

$$\delta\Psi = i\Psi\,\delta\omega_v$$
$$\delta\bar\Psi = -i\bar\Psi\,\delta\omega_v .$$

Der klassische Noether-Strom:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_E}{\partial(\partial_\mu\Psi)} = \bar\Psi\gamma_\mu \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{j_\mu}} = \frac{\partial\mathcal{L}_E}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\frac{\delta\Psi}{\delta\omega_v} = \underline{\underline{i\bar\Psi\gamma_\mu\Psi}} \quad ; \quad \partial_\mu j_\mu = 0 .$$

In der Quantenfeldtheorie:

Obwohl es um eine globale Symmetrie geht, verlangt die Ward-Identität (*) auf Seite 89 die Betrachtung einer lokalen bzw. ortsabhängigen Tramformation!

$$S_E = \int d^4y\ \bar\Psi(y)\,[\gamma_\mu D_\mu + m\,]\,\Psi(y)$$

$$\delta S_E = \int d^4y \left\{ -i\bar\Psi(y)\,\delta\omega_v(y)\,[\gamma_\mu D_\mu + m\,]\,\Psi(y) + i\bar\Psi(y)\,[\gamma_\mu D_\mu + m\,]\,\delta\omega_v(y)\,\Psi(y) \right\}$$

$$\hookrightarrow \partial_\mu\,[\delta\omega_v(y)\Psi(y)] = [\partial_\mu\delta\omega_v(y)]\,\Psi(y) + \delta\omega_v(y)\,\partial_\mu\Psi(y)$$

$$= \int d^4y \left\{ i\bar\Psi(y)\gamma_\mu\Psi(y)\ \partial_\mu\delta\omega_v(y) \right\}$$
$$= \int d^4y\ \delta\omega_v(y) \left\{ -\partial_\mu\, i\bar\Psi(y)\gamma_\mu\Psi(y) \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta S_E}{\delta\omega_v(x)} = -\partial_\mu j_\mu(x)\ !$$

Das heisst:

* $O_y \equiv \mathbb{1}$ in Gleichung (*)

  $\Rightarrow \langle \partial_\mu j_\mu(x)\rangle = 0$

  $\Rightarrow$ Die klassische Gleichung gilt als Erwartungswert!

* $O_y \equiv j_\nu(y)$; $\delta O_y = 0$ weil $y \neq x$

  $\Rightarrow \partial^x_\mu \langle j_\mu(x)\,j_\nu(y)\rangle = 0$!

  $\Rightarrow$ Der Korrelator $\langle j_\mu(x)\,j_\nu(y)\rangle$ ist „tramversal"!

Als das zweite Beispiel betrachten wir QCD mit N_f „Flavours", d.h. verschiedene Arten von Quarks.

Seien F^a Generatoren wie die T^a, aber $N_f \times N_f$ - Matrizen, statt $N_c \times N_c$. Wir bezeichnen die Strukturkonstanten mit h^{abc} statt f^{abc}: $[F^a, F^b] = i h^{abc} F^c$. Die Spinoren werden als N_f-komponentige Vektoren betrachtet.

Zwei Arten von Transformationen:

$$\delta_V^a \psi \equiv i F^a \psi \, \delta\omega_V \; ; \quad \delta_V^a \bar\psi \equiv -i \bar\psi F^a \delta\omega_V \quad \text{„Vektortransformation"},$$
$$\delta_A^a \psi \equiv i F^a \gamma_5 \psi \, \delta\omega_A \; ; \quad \delta_A^a \bar\psi \equiv +i \bar\psi \gamma_5 F^a \delta\omega_A \quad \text{„Axialtransformation"}.$$

Für die Wirkung:

$$\delta_V^a S_E = \int d^4x \; \delta\omega_V(x) \left\{ -\partial_\mu \left[i \bar\psi(x) \gamma_\mu F^a \psi \right] \right\}$$

$$\delta_A^a S_E = \int d^4x \left\{ i \bar\psi \gamma_5 F^a \delta\omega_A(x) \left[\gamma_\mu D_\mu + m\right] \psi + \bar\psi \left[\gamma_\mu D_\mu + m\right] i F^a \gamma_5 \delta\omega_A(x) \psi \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ i \bar\psi F^a \gamma_\mu \gamma_5 \psi \, \partial_\mu [\delta\omega_A(x)] + 2 m i \bar\psi F^a \gamma_5 \psi \, \delta\omega_A(x) \right\} \quad \text{falls } \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0!$$

$$= \int d^4x \; \delta\omega_A(x) \left\{ -\partial_\mu \left[i \bar\psi F^a \gamma_\mu \gamma_5 \psi \right] + 2 m i \bar\psi F^a \gamma_5 \psi \right\}$$

„Operatoren":

$$V_\mu^a(x) \equiv i \bar\psi(x) F^a \gamma_\mu \psi(x) \; ; \quad A_\mu^a(x) \equiv i \bar\psi(x) F^a \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) \; ;$$
$$S^a(x) \equiv i \bar\psi(x) F^a \psi(x) \; ; \quad P^a(x) \equiv i \bar\psi(x) F^a \gamma_5 \psi(x) \; .$$

Dann gilt:

$$\delta_V^a V_\mu^b = -\bar\psi(x) \left(-F^a F^b + F^b F^a \right) \gamma_\mu \psi(x) \delta\omega_V = + h^{abc} V_\mu^c \, \delta\omega_V$$
$$\delta_A^a V_\mu^b = -\bar\psi(x) \left(\gamma_5 \gamma_\mu F^a F^b + \gamma_\mu \gamma_5 F^b F^a \right) \psi(x) \delta\omega_A = + h^{abc} A_\mu^c \, \delta\omega_A \quad \text{falls } \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0!$$
$$\delta_V^a A_\mu^b = -\bar\psi \left(-F^a F^b + F^b F^a \right) \gamma_\mu \gamma_5 \psi \, \delta\omega_V = + h^{abc} A_\mu^c \, \delta\omega_V$$
$$\delta_A^a A_\mu^b = -\bar\psi \left(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5 F^a F^b + \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5 F^b F^a \right) \psi \, \delta\omega_A = + h^{abc} V_\mu^c \, \delta\omega_A \quad \text{falls } \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0!$$
$$\vdots$$
$$\delta_A^a P^b = -\bar\psi \left(\gamma_5 \gamma_5 F^a F^b + \gamma_5 \gamma_5 F^b F^a \right) \psi \, \delta\omega_A = -\bar\psi \{F^a, F^b\} \psi \, \delta\omega_A$$

usw.

Ward-Identitäten mit diesen Transformationen liefern wichtige „Stromalgebra"-Beziehungen, z.B.

$$O_y \to P^b(y) \quad ; \quad x \neq y \quad ; \quad \text{Axialtransformation } \delta_A^a$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\partial_\mu^x \left\langle A_\mu^a(x) P^b(y) \right\rangle + 2m \left\langle P^a(x) P^b(y) \right\rangle$$

„PCAC"

— o —

Die Signifikanz der Ward-Identitäten

* Die Ward-Identitäten sind exakte Beziehungen zwischen verschiedenen nackten Green-Funktionen.
* Das bedeutet, dass sie auch bestimmen können, was für Divergenzen die Theorie haben kann.
* Diese Tatsache hilft weiterhin die Renormierbarkeit der Theorie zu beweisen, sowie, indem wir die Gültigkeit der Ward-Identitäten auch für renormierte Grössen verlangen, nicht-störungstheoretische Renormierungsbedingungen zu stellen.

Literatur: J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Kapitel 12-21;

M. Lüscher, Advanced Lattice QCD, https://arxiv.org/abs/hep-lat/9802029

—— ∘ ——

Es gibt Ward-Identitäten auch für die generierenden Funktionale.

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{ - S_E[\phi] + \int d^4x \, J^a(x)\phi^a(x) \right\} \qquad \text{(Seite 38)}$$

$$\frac{\delta S_E}{\delta \omega(x)} = - \partial_\mu j^i_\mu(x) \qquad \text{(Seite 90)}$$

Sei $O_y[\phi] \equiv \exp\left\{ \int d^4y \, J^a(y)\phi^a(y) \right\}$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta \omega^i(x)} O_y[\phi] = J^a(x) \cdot \frac{\partial \phi^a(x)}{\partial \omega^i} \exp\left\{ \int d^4y \, J^a(y)\phi^a(y) \right\} = J^a(x) \, \Phi^a_i(x) \exp\{\ldots\},$$

wo $\Phi^a_i(x)$ abhängig von $\phi^a(x)$ sein kann.

Seite 89 $\Rightarrow$ $\left\langle J^a(x) \, \Phi^a_i[\phi^b(x)] \exp\{\ldots\} \right\rangle = \left\langle - \partial^x_\mu j^i_\mu(x) \exp\{\ldots\} \right\rangle$.

Integration über x vernichtet die rechte Seite

$$\Rightarrow \int d^4x \, J^a(x) \, \Phi^a_i\left[\frac{\delta}{\delta J^b(x)} \right] Z[J] = 0 .$$

Ward-Identitäten für $W[J]$ und $\Gamma[\varphi]$: Aufgabe 10.2.

—— ∘ ——